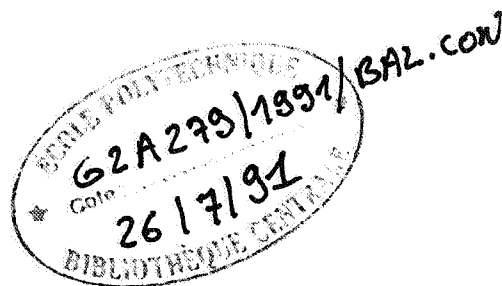


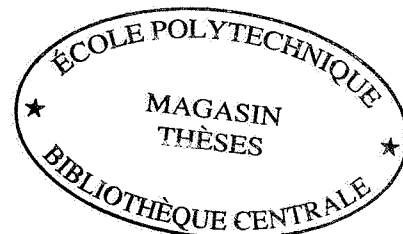


ÉCOLE POLYTECHNIQUE



# THESE

présentée pour obtenir  
le titre de



DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

par

**Patrick BALLARD**

**Contraintes résiduelles induites par impact rapide.  
Application au choc-laser.**

Soutenue publiquement le 22 Avril 1991 devant la Commission d'Examen  
composée de :

MM.	A. ZAQUI	Président
	H.D. BUI	Rapporteur
	R. FABBRO	Rapporteur
	A. BIGNONNET	Examineur
	F. COTTET	Examineur
	K. DANG VAN	Examineur
	E. FABRE	Examineur
	D. FRANCOIS	Examineur
	J. FRELAT	Examineur



5 0 1 1 9 0 1









## Remerciements

Cette étude est le fruit d'une collaboration entre plusieurs laboratoires dont principalement le Laboratoire de Mécanique des Solides et le Laboratoire d'Utilisation des Lasers Intenses de l'Ecole Polytechnique. L'ensemble du travail a été initié et financé par PSA Etudes & Recherches.

La mise en place de cette étude est due à Jean Fournier dont le dynamisme a été une source de motivation constante.

Joël Frelat a guidé mes premiers pas de chercheur en Mécanique. Il a su me transmettre sa méthodologie d'approche des problèmes.

Le sens physique et l'esprit critique de Rémy Fabbro ont été des repères permanents.

Les expériences laser ont été menées avec l'aide et les conseils avisés de Rémy Fabbro et David Devaux. Sans eux, elles n'auraient pu être menées à bien.

Marc Ayel et Louis Castex m'ont fait bénéficier de leur expérience en mesures de contraintes résiduelles. La majorité des résultats présentés a été obtenue par eux.

Les essais de fatigue ont été conduits par Pascal Merrien et André Bignonnet.

Quelques résultats de calcul numériques figurent également dans ce travail. Ils n'ont pu être réalisés que grâce à l'aide et aux conseils de Joël Frelat, Pirouz Navidi et Jean-Michel Hablot.

Enfin, de nombreuses discussions avec Ky Dang Van, Yves Rougier, Hubert Maigre, Quoc Son Nguyen, Claude Stolz, Gérard Gary m'ont été de constantes sources d'inspiration.

Mes collègues techniciens et secrétaires m'ont apporté quotidiennement leur aide et leur gentillesse.

Qu'ils en soient tous remerciés.







## Introduction générale

# Le Choc-Laser

Il y a environ 9000 ans, à l'âge du bronze et du fer, l'Homme apprit à extraire du sol sur lequel il vivait des substances étranges, froides au toucher, brillantes à la lumière, malléables dans le feu et ensuite très résistantes aux efforts. La science des matériaux était née avec la découverte des remarquables propriétés mécaniques et de mise en forme des matériaux métalliques.

Depuis, l'évolution sans cesse accélérée du progrès technique a suscité des besoins en matériaux métalliques de plus en plus performants sur le plan mécanique. Qu'il s'agisse de l'aventure spatiale ou sous-marine, des automobiles aux performances sans cesse accrues ou des superstructures (ponts, tours, etc...), les progrès ont reposé sur le développement toujours affirmé de la science des matériaux. Elle est à l'origine de la mise au point de nouveaux matériaux mais aussi de l'amélioration sans cesse poursuivie des matériaux déjà utilisés.

En ce qui concerne le matériau métallique, une grave limitation à son emploi a été découverte, il y a seulement un siècle : la rupture par fatigue. Une pièce métallique soumise à une sollicitation cyclique peut se rompre alors qu'elle résisterait à la valeur la plus critique du chargement appliquée de manière statique. Des traitements ont alors été développés, le plus souvent de manière empirique, dans le but d'augmenter les performances en fatigue des structures métalliques. Ces traitements se classent traditionnellement en deux catégories : les traitements thermiques (trempe, nitruration, cémentation) et les traitements mécaniques (grenailage, galetage). La plupart de ces traitements sont des traitements de surface. Il apparaît en effet que dans la plupart des cas, la zone critique en fatigue d'une structure métallique est localisée dans un petit volume en général proche de la surface.

Cette analyse justifie l'intérêt des traitements de surface en général et des traitements de surface localisés en particulier. Par une opération localisée appliquée en général en phase finale, on est alors capable de renforcer la structure en son point le plus critique. Depuis une dizaine d'années, les lasers de puissance ont fait leur apparition dans le monde des traitements de surface. Ils présentent en effet beaucoup d'intérêt sur le plan industriel en termes de contrôle, automatisation, flexibilité, etc... La trempe superficielle par laser et le choc-laser sont deux exemples l'un thermique, l'autre mécanique de ces traitements par laser.

D'autre part, la complexité croissante des problèmes ainsi que la nécessité d'une fiabilité accrue ont provoqué le remplacement progressif de l'empirisme par une démarche plus formalisée. Depuis 1970, les développements de la compréhension théorique des phénomènes de fatigue et leur modélisation (citons les travaux de MM. Dang Van et Papadopoulos) ont abouti à la prévision de la tenue en fatigue d'une structure soumise à une sollicitation cyclique quelconque. D'autres travaux (théoriques ou expérimentaux) ont été entrepris en parallèle de manière à caractériser l'effet d'un traitement de surface sur un matériau donné soumis à une sollicitation connue. On tend ainsi à donner à l'ingénieur tous les outils théoriques lui permettant de dimensionner une pièce mécanique, du choix du matériau et du traitement à la définition de la géométrie. De plus, la complexité des traitements de surface conçus à l'heure actuelle nécessite leur modélisation fine pour parvenir à leur optimisation.

Ce contexte nous a conduit à nous poser le problème de la modélisation d'un traitement de surface récemment apparu : le choc-laser. Il s'agit d'un traitement de surface purement mécanique réalisé à l'aide d'impulsions laser de très forte intensité. En effet, l'irradiation d'une cible par une telle impulsion laser provoque l'application d'une forte pression pendant un temps très court à la surface de la cible. Ce phénomène est donc tout à fait similaire à un impact. Cet impact laser va induire alors des contraintes résiduelles de compression à la surface de la cible qui seront ensuite très favorables à la tenue en fatigue. On conçoit alors que l'analyse du choc-laser passe par la modélisation et le calcul des contraintes







résiduelles induites par impact. C'est l'objet de la première partie de ce travail. L'application des résultats au choc-laser permettra ensuite le calcul des contraintes résiduelles induites en fonction des caractéristiques du matériau constituant la cible et du réglage du laser. Il devient alors très facile d'optimiser matériau et réglage en vue d'une application donnée.

## **Plan de l'ouvrage**

### **Introduction générale**

#### **Partie I : Contraintes résiduelles induites par impact rapide**

**Chapitre 1 : Choix d'un modèle rhéologique**

**Chapitre 2 : Description générale des ondes induites par impact rapide dans les métaux**

**Chapitre 3 : Calcul de la déformation plastique induite par impact rapide d'amplitude limitée dans un métal**

**Chapitre 4 : Calcul du champ de contrainte résiduelle induit par impact rapide non visqueux d'amplitude limitée dans un métal**

#### **Partie II : Application au choc-laser**

**Chapitre 1 : Génération d'impacts rapides par laser**

**Chapitre 2 : Confrontation des résultats de mesures de contraintes résiduelles induites par choc-laser avec les prédictions théoriques**

**Chapitre 3 : Application à l'amélioration de la tenue en fatigue des pièces métalliques traitées par choc-laser**

### **Conclusion générale**

**Annexe A : Calcul du champ de contrainte induit dans un massif semi-infini par un champ de déformation plastique homogène dans une inclusion parallèpipédique affleurant à la surface**

**Annexe B : Résolution des systèmes différentiels hyperboliques par la méthode des caractéristiques**

**Annexe C : Mesure de contrainte résiduelle par diffraction de rayons X**

**Annexe D : Description des codes de calcul numérique utilisés**

## ***Partie I***

### **Contraintes résiduelles induites par impact rapide**







## Chapitre 1

# Choix d'un modèle rhéologique

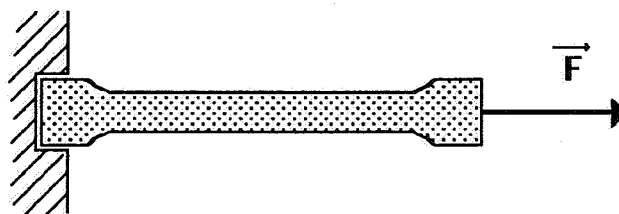
## Introduction

Le but de ce chapitre est de décrire, de manière accessible aux non-mécaniciens (et notamment aux physiciens de l'interaction laser-matière), les modèles utilisés en Mécanique des Solides pour décrire le comportement d'un métal isotrope à température ambiante.

On choisit d'emblée un point de vue macroscopique. La matière formée d'atomes est discontinue à l'échelle microscopique, néanmoins, si l'on se place à une échelle suffisamment grande l'hypothèse du milieu continu (au sens mathématique) déformable constitue une excellente approximation de la réalité. Dans ce cadre, on choisit de se limiter à l'étude des petites déformations, et l'on suppose vérifiée l'Hypothèse des Petites Perturbations (H.P.P.). On sait que pour pouvoir calculer l'état mécanique d'un système, il faut adjoindre aux équations, une relation liant le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  au tenseur des déformation  $\underline{\epsilon}$ . Cette relation est appelée loi de comportement. On veut ici proposer une loi de comportement du matériau métallique isotrope de manière à pouvoir ensuite analyser, en terme de mécanique des milieux continus, l'effet d'un impact sur un tel matériau.

## 1. L'élasticité linéaire

Considérons une éprouvette constituée de notre matériau métallique isotrope.



Un expérimentateur vient alors appliquer une force à l'extrémité de l'éprouvette. L'éprouvette s'allonge, et l'expérimentateur constate que tant qu'il ne tire pas trop fort, l'allongement est grosso modo proportionnel à tout instant à la force appliquée : il a l'impression de tirer sur un ressort. Le ressort est le modèle rhéologique associé à l'élasticité linéaire.



De manière plus générale, l'élasticité linéaire se traduit par la proportionnalité à tout instant des contraintes et déformations. L'équation s'écrit (loi de Hooke) :

$$\underline{\sigma} = \underline{L} : \underline{\varepsilon}$$

où  $\underline{L}$  est le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques. Dans le cas du matériau isotrope, cette équation devient :

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{ trace}(\underline{\varepsilon}) + 2\mu \underline{\varepsilon}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé. Cette équation peut s'inverser en :

$$\underline{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{ trace}(\underline{\sigma}) + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. On a, de plus, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

A titre indicatif, dans le cas d'un acier, on a :

$$\begin{aligned} E &= 210\,000 \text{ MPa} & \nu &= 0,3 \\ \lambda &= 112\,000 \text{ MPa} & \mu &= 81\,400 \text{ MPa} \end{aligned}$$

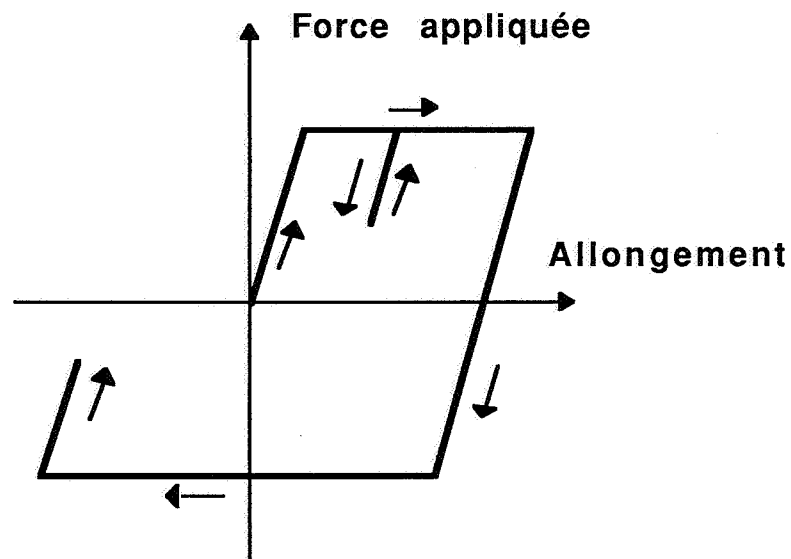


## 2. L'élasto-plasticité parfaite

L'expérimentateur s'autorise maintenant à tirer plus fort. Si l'éprouvette est constituée d'un matériau d'une classe particulière dite classe des matériaux très peu écrouissables, il pourra faire les observations suivantes : tant qu'il ne dépasse pas une force seuil le matériau est élastique linéaire. Puis lorsqu'il dépasse le seuil, l'éprouvette s'allonge énormément l'empêchant d'appliquer une force supérieure au seuil. Il pourra croire tirer sur l'assemblage suivant qui est le modèle rhéologique de l'élasto-plasticité parfaite :



où l'on a mis en série avec le ressort un patin de frottement solide (fixe tant que la force tangentielle ne dépasse pas le seuil et d'allongement indéterminé dès qu'elle l'atteint). Le diagramme force appliquée-allongement obtenu peut être idéalisé de la manière suivante :



Notons que dans le cas où la contrainte reste faible, on retrouve le matériau élastique du 1.

La généralisation au cas tridimensionnel peut se faire à l'aide des équations suivantes :

$$\underline{\sigma} = \underline{L}:(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^P)$$

et

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^P &= 0 \quad \text{si} \quad \frac{3}{2} \underline{s}:\underline{s} < \sigma_Y^2 \quad (\text{seuil de Von Misès}) \\ \underline{\varepsilon}^P &= \alpha \cdot \underline{s} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} \underline{s}:\underline{s} = \sigma_Y^2 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

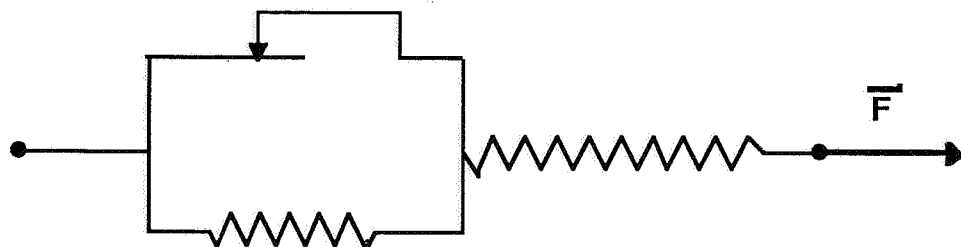
où  $\underline{s}$  désigne le déviateur des contraintes et  $\sigma_Y$  la limite d'élasticité en traction simple.  $\alpha$  est un facteur de proportionnalité indéterminé, dit multiplicateur plastique. Il apparaît des déformations irréversibles  $\underline{\varepsilon}^P$  dites 'plastiques'. Dans le cas d'un matériau isotrope, la première équation se réduit à :

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{ trace}(\underline{\varepsilon}) + 2\mu (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^P)$$

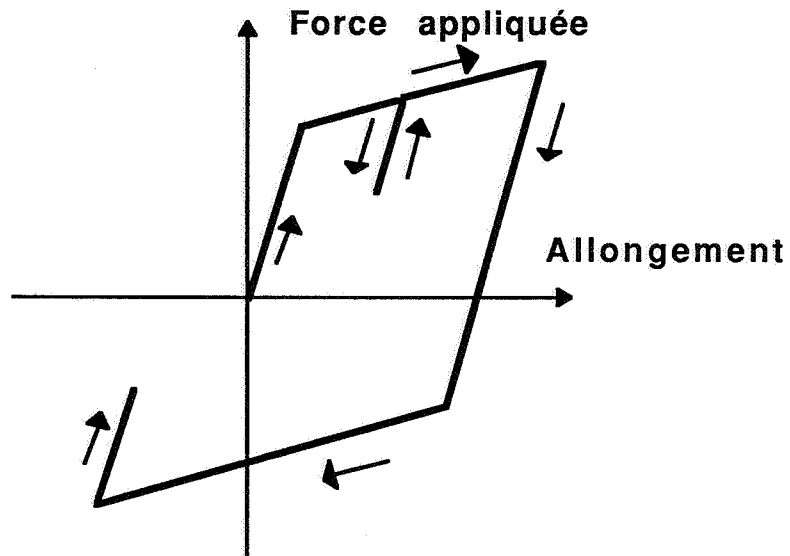
où  $\lambda$  et  $\mu$  désignent toujours les constantes de Lamé.

### 3. Le matériau élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire

L'écrouissage désigne le phénomène suivant : une déformation plastique dans un matériau provoque une variation de sa limite d'élasticité. La classe des matériaux peu écrouissables peut être élargie à la classe des matériaux à écrouissage cinématique linéaire. Le modèle rhéologique que l'on peut associer à ce phénomène est le suivant :



En terme de diagramme force appliquée-allongement, on obtient :



Les équations s'écrivent :

$$\underline{\sigma} = \underline{L}:(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p)$$

et

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = 0 \quad \text{si} \quad \frac{3}{2}(\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p):(\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p) < \sigma_Y^2$$

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \alpha \cdot (\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p) \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}(\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p):(\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p) = \sigma_Y^2 \quad \text{sinon}$$

On peut faire deux remarques :

- Tout d'abord, notons que ce dernier comportement généralise les précédents. En effet, il suffit de prendre  $\sigma_Y$  infini pour retrouver l'élasticité linéaire et  $C$  nul pour retrouver l'élasto-parfaite plasticité.
- De plus, ajoutons qu'un simple essai de traction monotone suffit à identifier tous les paramètres du comportement. En effet, en traction simple, la contrainte longitudinale est égale à la force appliquée divisée par la section de l'éprouvette et la déformation longitudinale est égale à l'allongement relatif de l'éprouvette.

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Contraintes et déformations sont donc connues dans l'éprouvette. Il est alors possible de représenter l'essai dans un diagramme  $(\epsilon, \sigma)$ . On relève alors sur la courbe expérimentale l'ordonnée  $\sigma_0$  du point anguleux (seuil d'apparition de plasticité) et  $p$  la pente de la courbe dans le domaine plastique. On a alors :

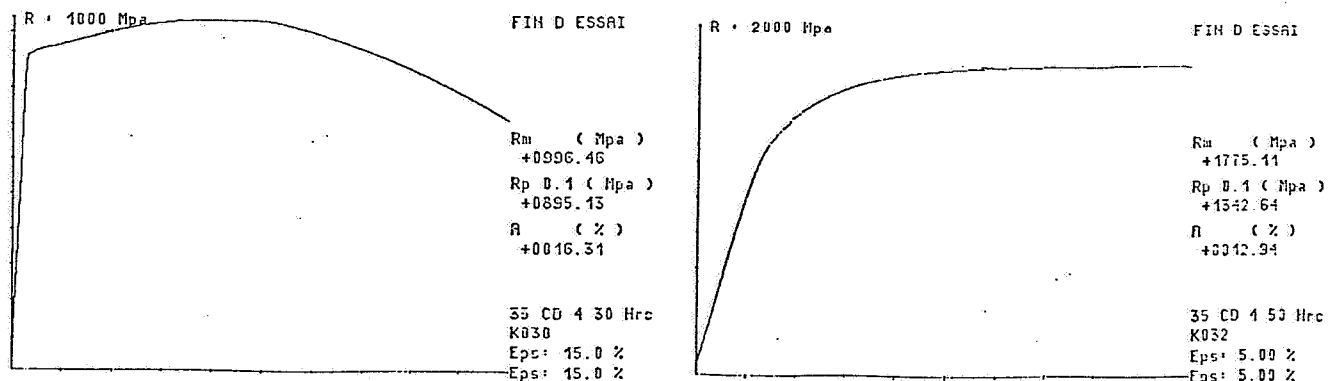
$$\sigma_Y = \sigma_0 \quad \text{et} \quad C = \frac{2/3}{1/p - 1/E}$$

A titre indicatif, on joint ci-après les courbes d'essai de traction effectuées sur les deux nuances d'acier principalement citées dans les parties précédentes : le 35CD4 30 HRC et le 35CD4 50 HRC. On en déduit :

35CD4 30 HRC :  $\sigma_Y = 870 \text{ MPa}$   $C = 2600 \text{ MPa}$

35CD4 50 HRC :  $\sigma_Y = 1250 \text{ MPa}$   $C = 7000 \text{ MPa}$

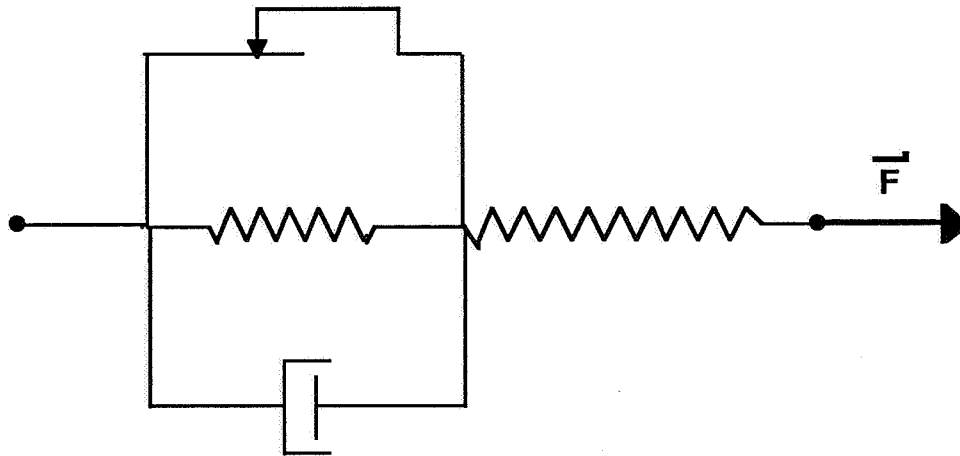
Dans le cas du 50 HRC, la courbe de traction est très 'arrondie' autour du seuil d'apparition de la plasticité et la valeur donnée n'est qu'estimative.



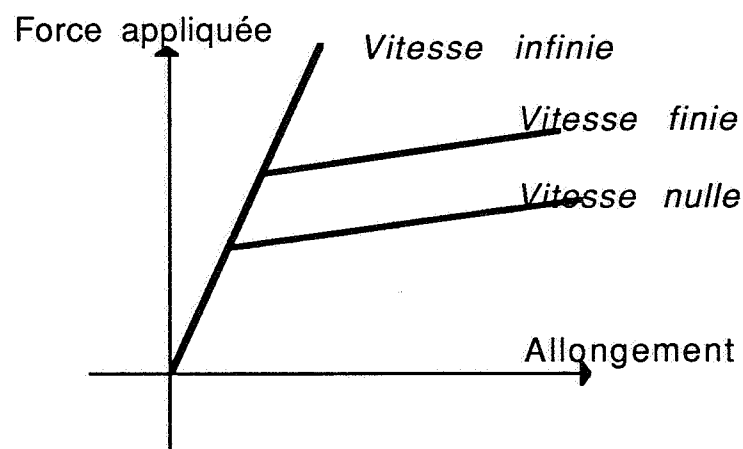
Courbes de traction simple des deux principaux matériaux évoqués dans ce travail (à gauche le 35CD4 30 HRC et à droite le 35CD4 50 HRC).

#### 4. Le matériau élasto-viscoplastique à écrouissage cinématique linéaire

On prend ici en compte les effets de vitesse de déformation. L'expérimentateur peut en effet enregistrer une réponse différente de la même éprouvette s'il tire lentement (ce qu'il faisait jusqu'ici) ou au contraire très rapidement. Ce sont des effets dépendants du temps ou visqueux. Le modèle rhéologique le plus simple que l'on peut associer à ce type de phénomène est le modèle de Bingham :



On a ajouté en parallèle au patin de frottement solide un piston qui impose une contrainte proportionnelle à sa vitesse d'allongement. On a alors un matériau sensible à la vitesse de déformation. A l'extrême, si l'on tire infiniment vite, le piston est bloqué et le comportement purement élastique. A l'opposé, si l'on tire infiniment lentement, le piston reste 'mou' et l'on retrouve le matériau élasto-plastique de la partie précédente. En diagramme allongement-force appliquée, on a :



Les équations s'écrivent :

$$\underline{\sigma} = \underline{L}:(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p)$$

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p}{\eta} \cdot Y \left[ \frac{3}{2} (\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p) : (\underline{s} - C\underline{\varepsilon}^p) - \sigma_Y^2 \right]$$

où  $Y()$  désigne la fonction de Heaviside.

Il reste alors à identifier le paramètre de viscosité  $\eta$  pour connaître complètement le comportement de nos matériaux. Pour cela, nous allons faire référence à des données expérimentales obtenues en 1985 par J.W. Swegle et D.E. Grady aux U.S.A. Le dispositif expérimental était le suivant : un échantillon mince est impacté par collision de plaque et un Interféromètre Doppler Laser (IDL) permet de résoudre temporellement la vitesse matérielle en face arrière de l'échantillon. Swegle & Grady disposaient d'échantillons constitués de divers matériaux et pour chacun d'eux, ils ont pu mesurer l'évolution en fonction du temps de la vitesse matérielle en face arrière. On suppose que de l'impact résulte une pression 'brutale' appliquée en surface :

$$p(t) = P.Y(t) \quad (\text{fonction de Heaviside})$$

On verra dans le chapitre 2 qu'une telle sollicitation induit une onde plane longitudinale dans la cible et qu'en présence d'effet visqueux, le front de cette onde va 's'étaler'. On comprend alors que la mesure du front de montée de l'onde à la face arrière puisse constituer une évaluation de la viscosité du matériau. Sachant que :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{v}}{c} \quad (\text{où } c \text{ est la vitesse de l'onde})$$

Swegle & Grady ont reporté pour chaque impact la contrainte longitudinale du choc et la vitesse de déformation maximale en face arrière. Ces résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Matériau	Pression de choc P (GPa)	Vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ ( $\mu\text{s}^{-1}$ )	Epaisseur de l'échantillon (mm)
Al	2,10	0,13	12.5
Al	3,60	1,10	12.5
Al	3,70	2,00	12.5
Be	25,2	58,6	3.95
Be	25,2	44,5	9,03
Be	25,1	53,2	8,05
Be	24,5	70,4	8,05
Be	17,5	11,6	9,02
Be	17,4	9,00	3,90
Be	17,0	10,1	8,06
Be	16,6	7,40	3,95
Be	11,4	3,20	8,06
Be	10,9	3,40	8,06
Be	10,5	2,90	3,95
Bi	1,20	0,14	4,06
Bi	2,45	1,89	3,04
Cu	2,60	0,34	6,34
Cu	5,60	7,30	6,36
Fe	10,3	1,57	6,30
Fe	13,2	4,00	6,31
U	7,52	0,27	7,54
U	9,57	0,73	7,57
U	11,6	1,56	7,53
U	12,6	1,86	7,62
U	14,3	4,14	7,64
MgO	8,17	0,45	3,30
MgO	11,1	1,51	3,13

Afin d'interpréter ces résultats dans le cas des aciers, on va utiliser le code de calcul dynamique par éléments finis décrit dans l'annexe D avec les équations du comportement élasto-viscoplastique énoncées plus haut et calculer les signaux de vitesse matérielle en face arrière correspondants. On constate que plus le coefficient  $\eta$  est grand plus l'onde a tendance à 's'étaler' et donc plus la vitesse de déformation maximale atteinte dans le front d'onde est faible. On peut ainsi ajuster ce coefficient  $\eta$  de manière à se recaler vis à vis des données de Swegle & Grady.

Pour ce faire, on a calculé numériquement la propagation d'un impact d'amplitude 10,3 GPa dans un acier supposé élasto-viscoplastique. Puis, pour différente valeur du coefficient de viscosité  $\eta$ , on a exhibé la valeur de la vitesse maximale de déformation dans le front d'onde à 6,3 mm de la surface. On a obtenu les résultats suivants :

$\eta$ (Pa.s)	$\dot{\epsilon}_{\max}$ (s <sup>-1</sup> )	$\log \dot{\epsilon}_{\max}$
10	$10^7$	7
100	$2.10^6$	6,3
1000	$3,5.10^5$	5,6
10000	$7,7.10^4$	4,9

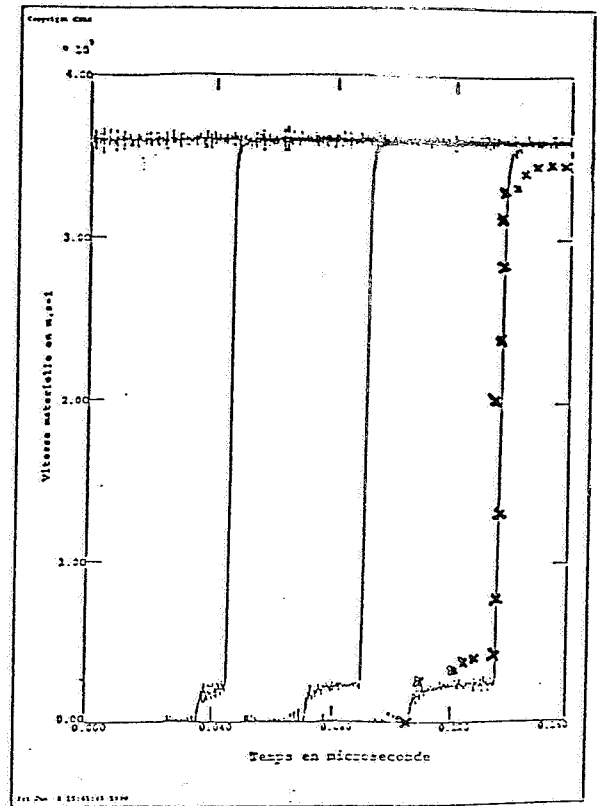
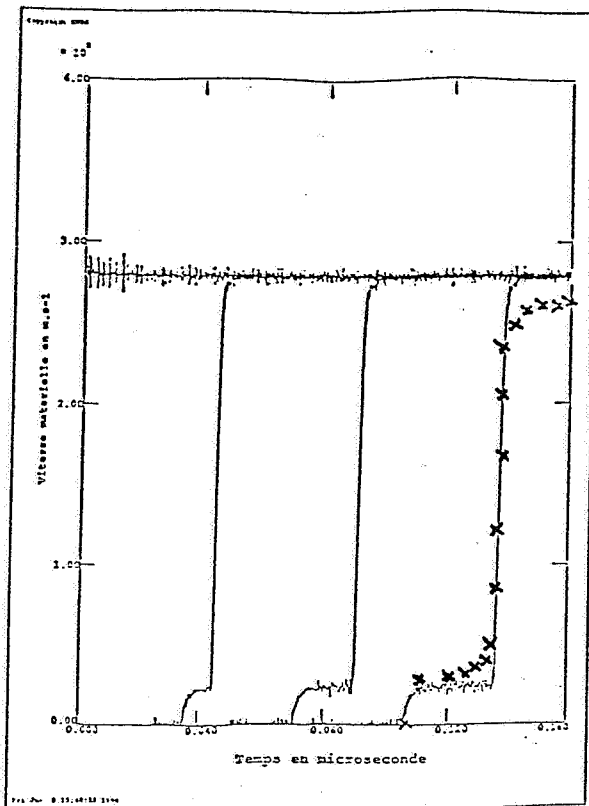
On remarque que l'on a une dépendance linéaire entre  $\log \dot{\epsilon}_{\max}$  et  $\log \eta$  et que l'on retrouve la valeur de la vitesse de déformation maximale mesurée par Swegle & Grady pour :

$$\eta = 100 \text{ Pa.s}$$

C'est donc une estimation du coefficient de viscosité d'un acier.

On a représenté ci-dessous le calcul de l'onde induite dans l'échantillon par l'impact de la plaque. La figure de gauche représente les résultats d'un calcul d'impact d'amplitude 10,3 GPa. On a représenté le signal de vitesse matérielle en fonction du temps calculé à quatre valeurs de la profondeur : 0 2,1 4,2 et 6,3 millimètres de la surface d'impact. La dernière courbe est comparée aux données expérimentales représentées par les croix sur le dessin. Pour  $\eta$  valant 100 Pa.s, on trouve une bonne adéquation entre la pente maximale calculée et la pente maximale expérimentale. Notons que cette pente diminue au fur et à mesure que l'on se place à des profondeurs de plus en plus importantes dans l'échantillon. La figure de droite représente les mêmes données dans le cas d'un impact d'amplitude 13,2 GPa.





En appliquant également ce traitement aux données de Swegle & Grady concernant l'aluminium, on trouve que le coefficient de viscosité de l'aluminium est également de l'ordre de :

$$\eta = 100 \text{ Pa.s}$$

## Conclusion

En prenant en compte successivement la plasticité, l'écrouissage cinématique et la viscosité, on a balayé les principaux phénomènes physiques qui régissent le comportement d'un métal sous impact d'amplitude limitée (cf chapitre 2). Ce comportement est donnée par six constantes :

- les constantes de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$
- la limite d'élasticité  $\sigma_Y$
- le module d'écrouissage cinématique  $C$
- le module de viscoplasticité  $\eta$
- la densité  $\rho$

Un essai de traction simple permet d'identifier les quatre premières, les données de Swegle & Grady associées à un calcul numérique simple permettent d'évaluer la cinquième et une simple pesée permettra de déterminer la dernière. Toutes les prédictions théoriques énoncées dans ce travail sont donc *transposables à n'importe quel matériau métallique par l'évaluation de ces six constantes.*

## Références

- [1] J. Mandel, "Propriétés Mécaniques des Matériaux", Eyrolles, Paris, 1978.
- [2] B. Persoz, "Introduction à l'Etude de la Rhéologie", Dunod, Paris, 1960.
- [3] J.W. Swegle et D.E. Grady, "Shock Viscosity and the Prediction of Shock Wave Rise Times", J. Appl. Phys. **58** (2) , 15 July 1985.





## Chapitre 2

# **Description générale des ondes induites par impact rapide dans les métaux**

## **Introduction**

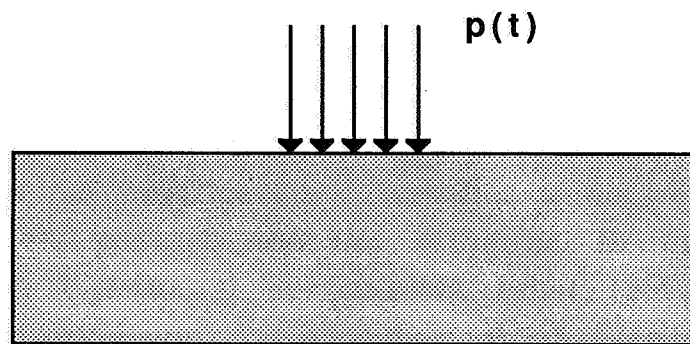
L'analyse de la propagation des ondes dans les solides a été l'objet de nombreuses investigations. On trouve une littérature abondante sur le problème, rassemblée sous le titre générique : Ondes de Choc dans les Solides (v. par exemple [4], [5], et [6]). L'analyse est toujours unidimensionnelle sans que cette hypothèse ne soit, à notre connaissance, justifiée. On montrera dans ce chapitre que cette hypothèse (cruciale car elle permet de transformer un problème de structure en un problème local) ne s'applique que lorsque la sollicitation est suffisamment courte. Cela nous conduira à définir la catégorie des impacts rapides. D'autre part, les études menées sur le sujet sont basées sur le formalisme dit hydrodynamique (les équations sont dérivées de la mécanique des fluides). Cette analyse se justifie comme on le verra aux très hautes pressions où le comportement du solide tend vers celui du fluide. Néanmoins, l'habitude a été prise de l'utiliser quelle que soit l'amplitude de l'onde en greffant de manière assez artificielle la plasticité à cette description hydrodynamique. Ce formalisme donne des résultats bien corrélés aux expériences. Cependant, il ne pouvait nous satisfaire, car outre qu'il contienne des incohérences sur le plan théorique, il ne permet pas de décrire l'état résiduel du matériau en terme de déformation plastique. C'est la raison pour laquelle, nous avons d'abord regardé le problème de l'impact rapide dans le cadre de la Mécanique des Solides en Petites Perturbations. Malheureusement, ce formalisme ne permet de décrire la

phénoménologie de la propagation de l'onde que si son amplitude ne dépasse pas une valeur limite. Nous verrons alors dans quelle mesure, l'analyse hydrodynamique peut alors prendre le relais.

## **1. Cadre de la Mécanique des Solides en Petites Perturbations**

### **1.1. Position du problème**

On s'intéresse ici à la réponse dynamique d'une cible constituée d'un matériau métallique à une sollicitation de type impact. On appelle impact l'application d'une loi temporelle de pression spatialement uniforme sur une partie quelconque de la surface de la cible.



L'objectif, ici, est de décrire la réponse de la cible à ce type de sollicitation.

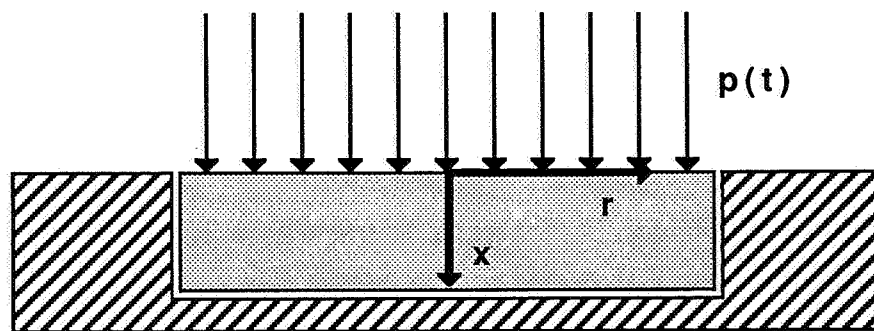
### **1.2. Description du matériau constituant la cible**

Le lecteur est ici renvoyé au chapitre 1. On suppose la cible constituée du matériau élasto-parfaitement plastique à seuil de Von Mises du paragraphe 2. L'écrouissage cinématique linéaire et la viscosité seront pris en compte ultérieurement afin de mettre en évidence leurs effets spécifiques.

### 1.3. Hypothèses

- 1) La pression est spatialement uniforme sur la partie de la surface sollicitée.
- 2) Les déplacements matériels à l'intérieur de la cible se font perpendiculairement à la surface. La surface étant plane, la déformation est uniaxiale. Cette hypothèse cruciale sera discutée et justifiée à posteriori. Elle n'est valable que lorsque la pression est appliquée pendant un temps suffisamment court. Le terme 'd'impact rapide' désignera dans toute la suite un impact pour lequel cette hypothèse est réalisée.
- 3) On néglige les effets de bord.

Les deuxième et troisième hypothèses peuvent s'illustrer de la manière suivante : on applique un pulse de pression à la surface d'un cylindre de matière emprisonné dans un moule indéformable dans lequel il se meut sans frottement.



Cette hypothèse implique que toute onde qui se propagera dans la cible sera nécessairement longitudinale (uniaxialité des déformations) et plane (indépendance du chargement et des conditions aux limites de la direction radiale  $r$ ).

## 1.4. Mise en équation du problème

On va voir que la réponse de la cible à la sollicitation peut être physiquement très différente suivant l'ordre de grandeur de l'amplitude  $P$  de la pression appliquée en surface. Nous allons ici décrire les phénomènes physiques intervenant dans chaque gamme de  $P$  tout en donnant les bornes de ces domaines de pression.

### 1.4.1. Analyse en élasticité

Nous supposons ici que l'amplitude  $P$  du chargement est telle que nulle part et jamais le critère de plasticité n'est violé. Nous donnerons à la fin de ce paragraphe la valeur de cette pression limite.

Dans tout ce qui suit nous utiliserons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$ . La déformation étant uniaxiale, elle s'écrit :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

D'après la loi de Hooke (cas de l'isotropie) :

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{ trace}(\underline{\varepsilon}) + 2\mu \underline{\varepsilon}$$

soit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

$$\text{avec :} \quad \sigma_r = \lambda \cdot \varepsilon \quad (1)$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon \quad (2)$$

Il faut ajouter à ces équations :

$$\text{div } \underline{\sigma} = \rho \cdot \ddot{\underline{u}}$$



soit :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

D'autre part, sachant :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

(2) et (3) conduisent à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On reconnaît l'équation des ondes. Une onde va donc se propager à la célérité :

$$c_{el} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

ou, de manière équivalente :

$$c_{el} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$$

Les équations (2) et (3) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

où  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$  désigne la vitesse matérielle.

Il s'agit d'un système d'équations différentielles du premier ordre linéaire et homogène (v. annexe B). Ce système est hyperbolique et les deux directions caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

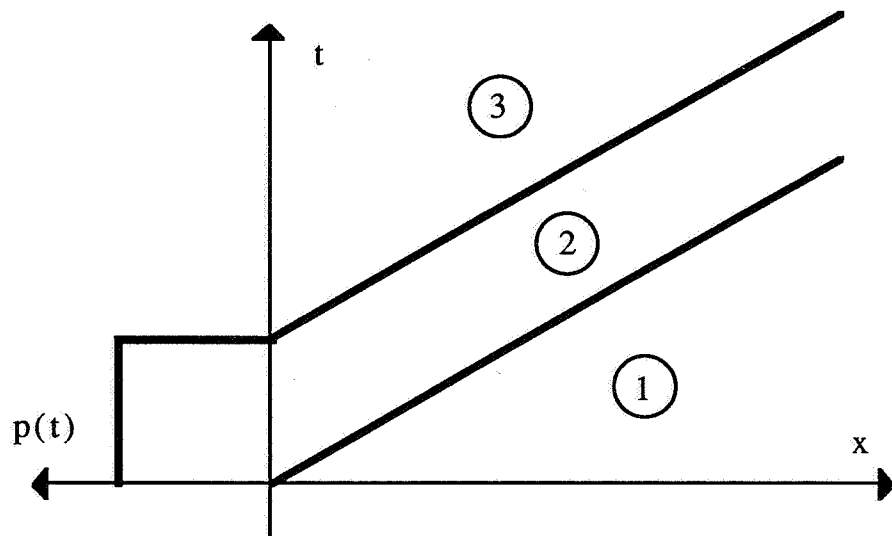
Le long de ces caractéristiques, on a :

$$d\sigma_x = dv = 0$$

De plus, au franchissement d'une ligne de discontinuité, on a la condition de continuité dynamique :

$$[\sigma_x] = -\rho c[v]$$

Ces équations permettent de résoudre complètement le problème posé. A titre d'exemple, on reproduit ci-après la propagation de l'onde dans le cas d'une sollicitation 'créneau' (c'est à dire une pression constante  $P$  appliquée pendant une durée  $\tau$ ).



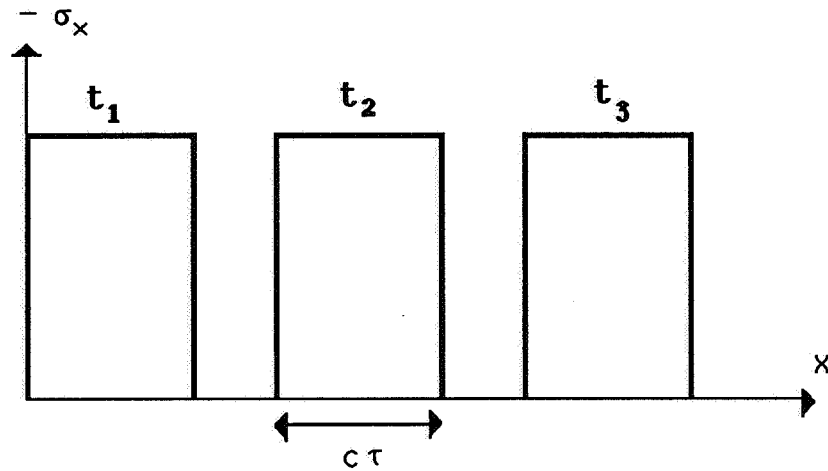
Du fait de la forme de la sollicitation, chacun des domaines 1, 2 et 3 séparés par une ligne caractéristique est constant en  $(\sigma_x, v)$ . A l'aide des équations énoncées ci-dessus et des conditions aux limites ( $\forall t \quad \sigma_x(0,t) = -p(t)$ ), on peut résoudre totalement le problème en tout point du plan  $(x, t)$ , à savoir :

$$\sigma_1 = 0 \qquad v_1 = 0$$

$$\sigma_2 = -P \qquad v_2 = \frac{P}{\rho c_{el}}$$

$$\sigma_3 = 0 \qquad v_3 = 0$$

On a représenté ci dessous la forme de l'onde de contrainte longitudinale en fonction de la profondeur à trois instants différents :



Les équations (1) et (2) permettent alors d'en déduire les contraintes et déformations dans tout le plan  $(x, t)$ . Il est alors facile d'en déduire la condition de non plastification :

$$\frac{3}{2} \underline{s} : \underline{s} = \frac{\sigma_x^2}{\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)^2}$$

d'où :

$$\forall x \quad \forall t \quad |\sigma_x| \leq \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \sigma_Y$$

soit :

$$\boxed{P \leq \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \sigma_Y}$$

ou, de manière équivalente :

$$P \leq \left(\frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}\right) \sigma_Y$$

Cette valeur limite de la pression appliquée en surface est communément appelé limite d'élasticité d'Hugoniot.

Application Numérique : dans le cas des aciers 35CD4 30 HRC et 50 HRC, les limites d'élasticité d'Hugoniot valent :

$$P_{30 \text{ HRC}} = 1460 \text{ MPa} \quad \text{ou} \quad 14,6 \text{ kBars}$$

$$P_{50 \text{ HRC}} = 2100 \text{ MPa} \quad \text{ou} \quad 21 \text{ kBars}$$

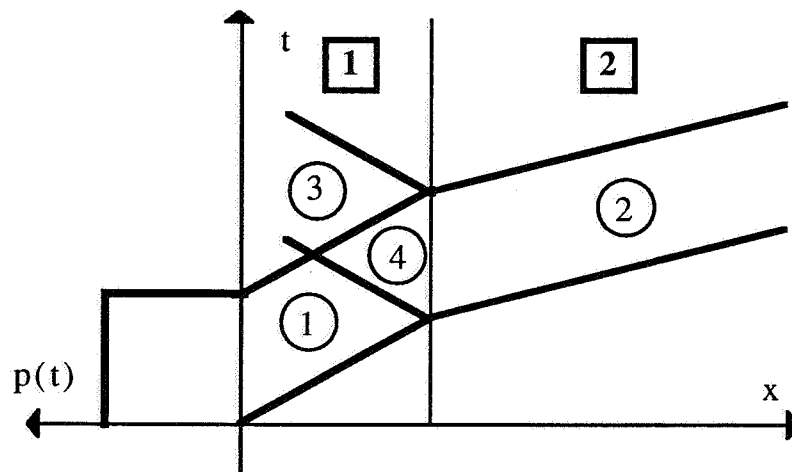
Tant que la pression appliquée en surface n'excède pas cette valeur, l'analyse précédente est applicable. Elle se limite bien entendu à des distances de propagation petites devant la taille (le diamètre par exemple) de la zone de la surface sur laquelle on a appliqué la sollicitation.

### Cas d'une interface entre deux matériaux différents

Le même traitement peut s'appliquer en considérant, bien sur, que les deux matériaux ont des caractéristiques différentes. On note :

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}} \quad c_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2}}$$

Les conditions à l'interface sont l'égalité des vitesses matérielles  $v$  et contraintes longitudinales  $\sigma_x$ .



avec :

$$\sigma_1 = -P$$

$$v_1 = \frac{P}{\rho_1 c_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{-2\rho_2 c_2 P}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$v_2 = \frac{2P}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$\sigma_3 = -P \cdot \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$v_3 = -\frac{P}{\rho_1 c_1} \cdot \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$\sigma_4 = \sigma_2$$

$$v_4 = v_2$$

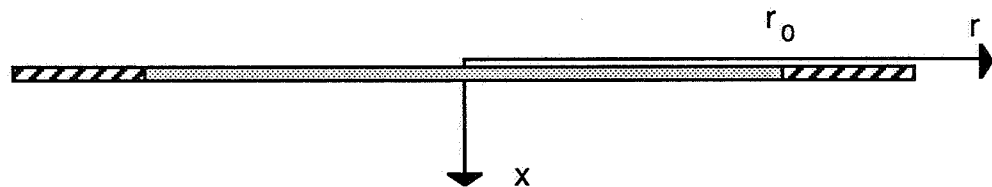
A l'interface, il y a donc émission d'une onde transmise et d'une onde réfléchie sauf en cas de coïncidence du terme

$$Z = \rho c$$

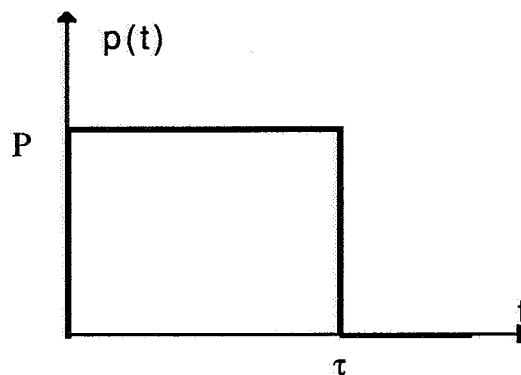
que l'on a l'habitude d'appeler impédance acoustique du milieu considéré.

#### 1.4.2. Retour sur l'hypothèse d'uniaxialité des déformations et définition de l'impact rapide

Dans cette hypothèse, on a postulé que la déformation induite par l'onde est uniaxiale. Regardons ce qu'il en est plus précisément au vu de l'analyse précédente. Considérons une tranche d'épaisseur  $dx$  infiniment fine à la surface de la cible considérée.



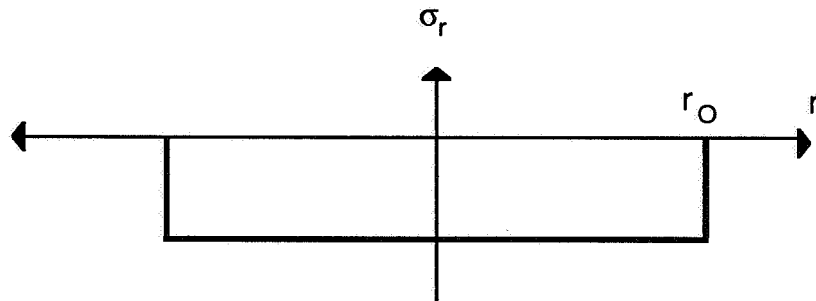
La contrainte longitudinale dans cette tranche est imposée par la pression appliquée que l'on peut supposer encore être de la forme :



On suppose également cette pression appliquée sur un disque de la surface. A l'instant 0, la contrainte longitudinale passe instantanément de la valeur 0 à la valeur -P. Dans cet intervalle de temps infiniment court, il ne peut y avoir aucun déplacement matériel radial. Il apparaît donc une contrainte radiale :

$$\sigma_r = \frac{-\lambda P}{\lambda + 2\mu}$$

dans toute la zone sollicitée. Il y alors discontinuité de  $\sigma_r$  de part et d'autre de la surface  $r = r_0$  ce qui est statiquement inacceptable.



Il va donc y avoir émission d'au moins une onde que nous allons supposer radiale. On notera u ce déplacement radial qui fait par ailleurs que la déformation n'est pas uniaxiale. Les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{v}{r} = 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{v}{r} = 0 \end{cases}$$

Là encore, il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaire du premier ordre hyperbolique (v. Annexe B). Les directions caractéristiques ont pour équations :

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+2\mu)}}$$

Notre onde radiale a donc une célérité différente de celle de l'onde 'principale'. A  $t = \tau$ , l'onde a fini de passer et seul un tube d'épaisseur :

$$\tau \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+2\mu)}}$$

a été perturbé. Partout ailleurs, la déformation a été uniaxiale. La condition de validité de l'hypothèse d'uniaxialité des déformations s'énonce donc :

$$\tau \ll r_0 \sqrt{\frac{\rho(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)}}$$

Application numérique : dans le cas d'un acier et d'un impact de 4 mm de rayon

$$\tau \ll 700 \text{ ns}$$

On appelle donc impact rapide un impact réalisant cette condition. Par la suite, cette hypothèse sera donc toujours supposée réalisée.

#### 1.4.3. Analyse en élasto-plasticité

On s'autorise maintenant un dépassement de la limite d'élasticité d'Hugoniot. Nous allons ici décrire les phénomènes physiques qui apparaissent. Ce problème est assez similaire à celui de la propagation d'une onde dans une barre (contraintes uniaxiales) élasto-plastique qui a déjà subi de nombreuses investigations (v. [2] et [3]). Néanmoins, l'hypothèses d'uniaxialité des déformations (et non des contraintes) induit quelques complications et ce notamment au niveau de l'onde de décharge.

On suppose toujours la déformation totale uniaxiale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Le comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \cdot \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p)$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \alpha \cdot s$$

Ces équations montrent que les déformations plastiques radiales et orthoradiales sont égales (à conditions qu'elles le soient au départ). En effet, les équations différentielles qui régissent  $s_r$  et  $s_\theta$  sont les mêmes et leurs valeurs initiales identiques.  $s_r$  et  $s_\theta$  restent égales et on en déduit :

$$\varepsilon_r^p = \varepsilon_\theta^p$$

La déformation plastique étant déviatorique, on en déduit qu'elle a la forme suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix}$$

Le comportement peut alors se réécrire simplement :

$$\sigma_r = \lambda \cdot \varepsilon + \mu \cdot \varepsilon^p$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon - 2\mu \cdot \varepsilon^p$$

A ces équations, il faut ajouter le critère de plasticité :

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \text{si} \quad |\sigma_r - \sigma_x| < \sigma_Y$$

$$|\sigma_r - \sigma_x| = \sigma_Y \quad \text{sinon.}$$

Les systèmes différentiels qui régissent la propagation s'écrivent alors :



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad \text{si } |\sigma_r - \sigma_x| < \sigma_Y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ (\lambda + \frac{2\mu}{3}) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad \text{et } |\sigma_r - \sigma_x| = \sigma_Y \text{ sinon.}$$

Il s'agit, là encore, d'un ensemble de systèmes hyperboliques linéaires (v. Annexe B). Les directions caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

pour le premier et :

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}}$$

pour le second. Ce premier résultat indique déjà que dans le cas d'un matériau élasto-plastique, il existe des ondes élastiques et des ondes plastiques qui se propagent à des vitesses différentes.

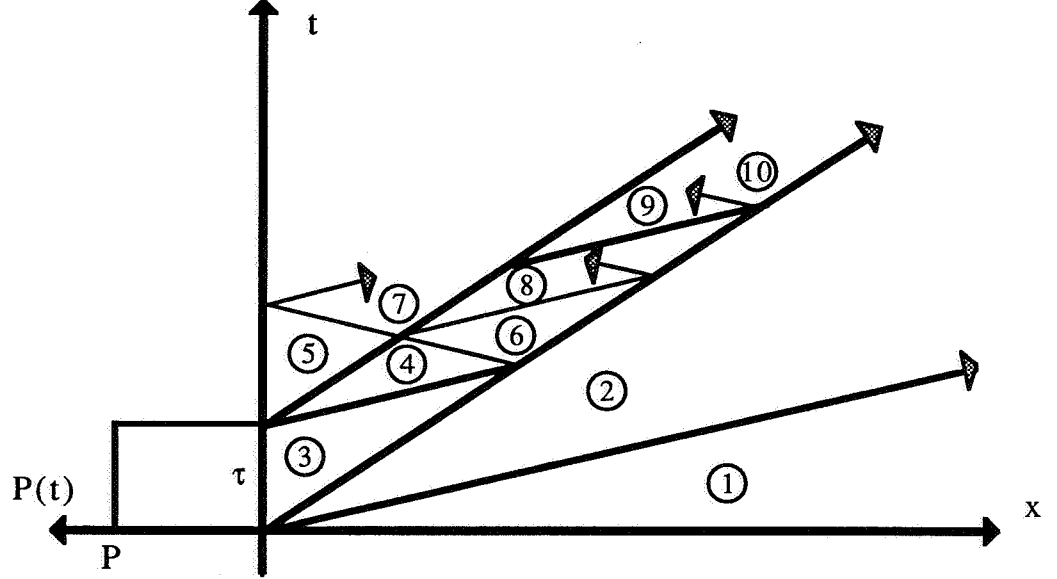
$$c_{el} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_{pl} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}}$$

On peut d'ailleurs ajouter que les ondes élastiques sont plus rapides que les ondes plastiques. On représente ci-après la réponse d'un matériau élasto-plastique à une sollicitation 'créneau' en surface analysée par la méthode des caractéristiques. On a procédé de même que précédemment en utilisant l'équation de continuité dynamique :

$$[\sigma_x] = -\rho c[v]$$

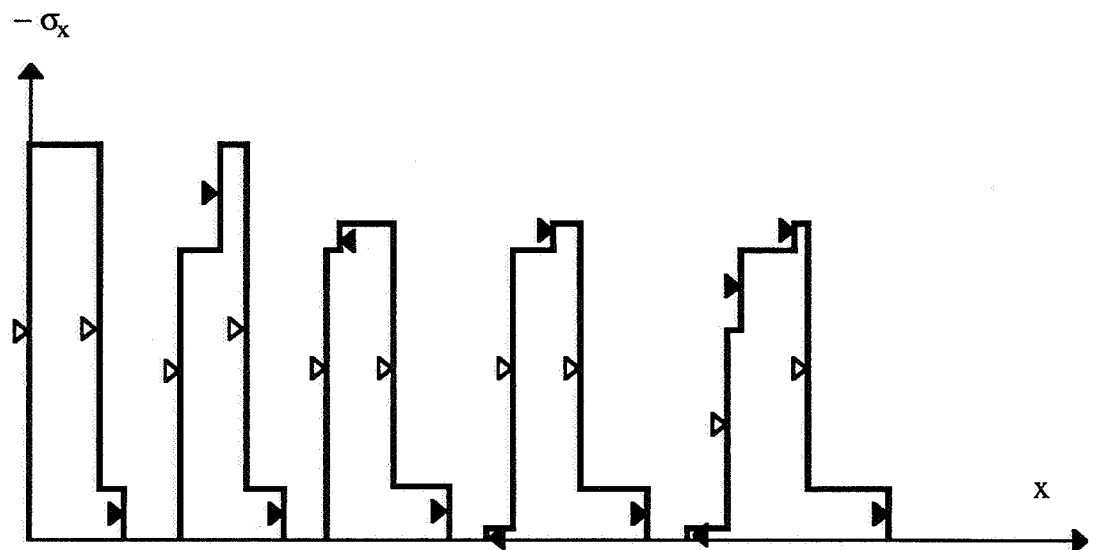
au franchissement d'une ligne caractéristique. La différence essentielle par rapport à l'analyse élastique est la prise en compte du critère de plasticité à chaque endroit du plan (x, t) pour déterminer si la propagation

est élastique ou plastique. La sollicitation est encore supposée être une pression  $P$  appliquée pendant un temps  $\tau$ . Le résultat brut est le suivant :



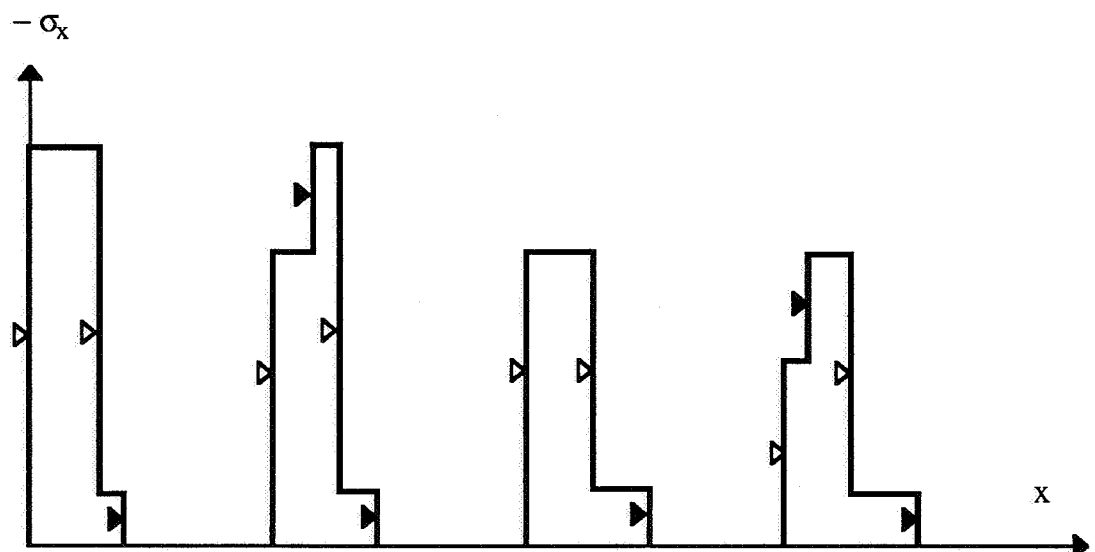
1:	$\sigma_1 = 0$	$v_1 = 0$
2:	$\sigma_2 = -\sigma_Y \cdot (1 + \frac{\lambda}{2\mu})$	$v_2 = \frac{ \sigma_2 }{\rho c_e}$
3:	$\sigma_3 = -P$	$v_3 = \frac{P}{\rho c_e} + \frac{ \sigma_2 }{\rho} \left( \frac{1}{c_e} - \frac{1}{c_p} \right)$
4:	$\sigma_4 = -P + 2 \sigma_2 $	$v_4 = \frac{P}{\rho c_p} - \frac{ \sigma_2 }{\rho} \left( \frac{1}{c_e} + \frac{1}{c_p} \right)$
5:	$\sigma_5 = 0$	$v_5 = \frac{ \sigma_2 }{\rho} \left( \frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_e} \right)$
6:	$\sigma_6 = \sigma_4 - 2 \sigma_2  \cdot \frac{c_e - c_p}{c_e + c_p}$	$v_6 = \frac{P}{\rho c_p} + \frac{ \sigma_2 }{\rho(c_e + c_p)} \left( \frac{c_p}{c_e} - \frac{c_e}{c_p} - 4 \right)$
7:	$\sigma_7 = -4 \sigma_2  \cdot \frac{c_p(c_e - c_p)}{(c_e + c_p)^2}$	$v_7 = \frac{ \sigma_2 }{\rho} \frac{c_e^2(c_e + c_p) + 3c_p^3 - c_e c_p^2}{c_e c_p (c_e + c_p)^2}$
8:	$\sigma_8 = -P + 2 \sigma_2 $	$v_8 = \frac{P}{\rho c_p} + \frac{ \sigma_2 }{\rho(c_e + c_p)} \left( \frac{3c_p}{c_e} - \frac{c_e}{c_p} - 6 \right)$
9:	$\sigma_9 = -P + 4 \sigma_2  - 2 \sigma_2  \cdot \frac{c_e - c_p}{c_e + c_p}$	$v_9 = \frac{P}{\rho c_p} - \frac{ \sigma_2 }{\rho(c_e + c_p)} \left( \frac{c_p}{c_e} + \frac{c_e}{c_p} + 6 \right)$
10:	$\sigma_{10} = -P + 4 \sigma_2  - 4 \sigma_2  \cdot \frac{c_e - c_p}{c_e + c_p}$	$v_{10} = \frac{P}{\rho c_p} - \frac{ \sigma_2 }{\rho} \frac{c_e^3 - c_p^3 + 9c_e c_p^2 + 7c_e^2 c_p}{c_e c_p (c_e + c_p)^2}$

Tels quels, ces résultats ne sont pas très parlants et l'on va regarder ce qu'ils signifient physiquement. Représentons la forme de l'onde dans la cible à des instants successifs :



- ▶ onde élastique se propageant à  $c_e$
- ▶ onde plastique se propageant à  $c_p$

On peut avoir une vision simplifiée du phénomène en ne considérant que les lignes en trait fort sur le diagramme caractéristique. Cela donnerait les profils d'onde suivants :



- ▶ onde élastique se propageant à  $c_e$
- ▶ onde plastique se propageant à  $c_p$

Le phénomène physique de base est donc simple : la base du front de charge étant élastique se propage donc plus vite que le reste de l'onde et se détache du reste. Il s'agit de ce que l'on appelle classiquement le précurseur élastique. De plus, à la décharge, il apparaît un phénomène similaire et des décharges élastiques successives vont raboter l'onde plastique au fur et à mesure de sa propagation. Remarquons qu'en élasto-plasticité, *l'amortissement en fonction de la distance de propagation est quasi-linéaire.*

L'étude à l'aide des caractéristiques montre qu'il existe en plus un système d'ondes élastiques qui assurent la continuité dynamique de l'ensemble. L'effet de ces ondes sur la propagation de l'onde plastique se limite en fait à diminuer légèrement l'amplitude des 'tranches rabotées' (des décharges élastiques). Celles-ci passent en fait de :

$$2\sigma_Y \left(1 + \lambda/2\mu\right) \quad \text{à :}$$

$$2\sigma_Y \left(1 + \lambda/2\mu\right) \cdot \frac{2c_p}{c_e + c_p}$$

et ce en supposant :

$$c_e < 3c_p$$

ce qui est vérifié pour tous les métaux.

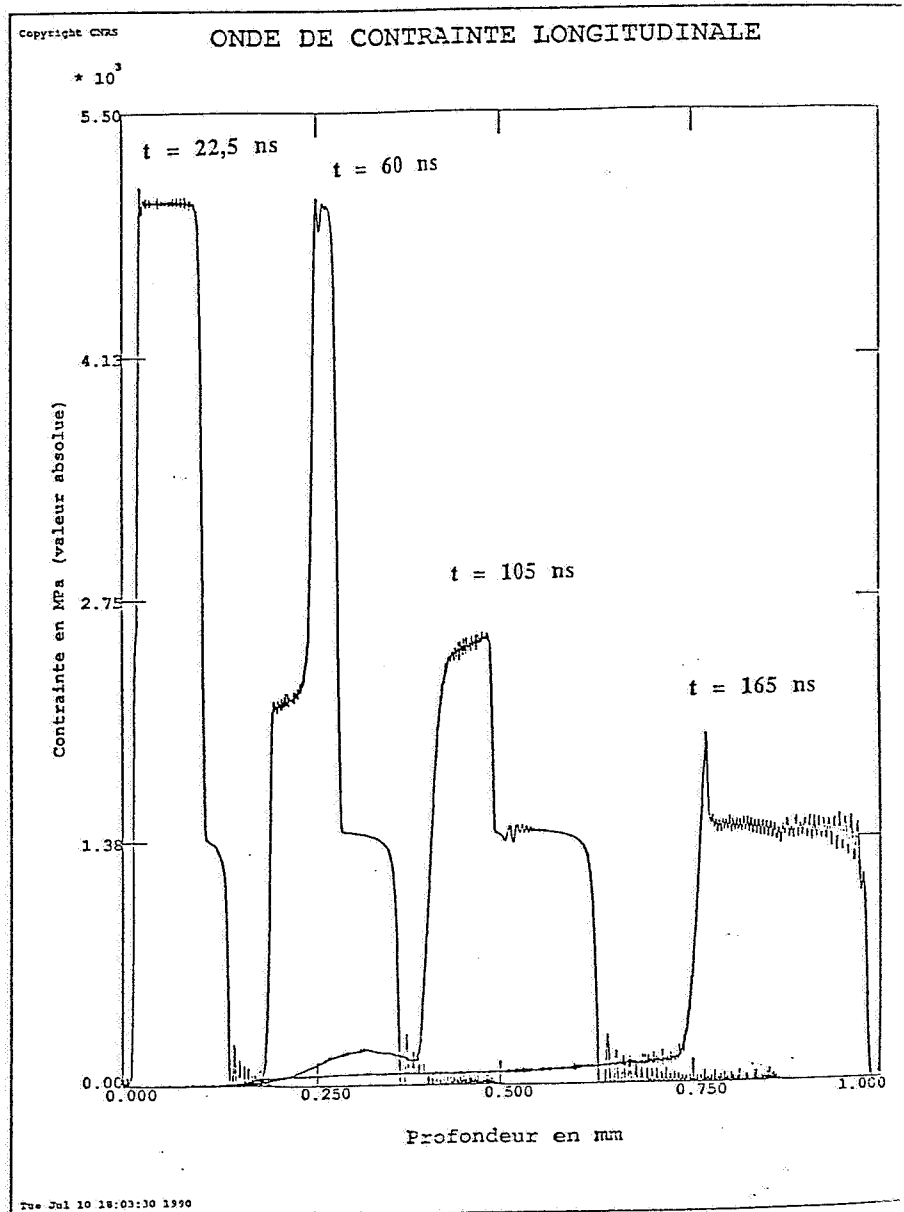
Cette analyse permet d'évaluer la profondeur affectée plastiquement par une pression  $P$  appliquée pendant le temps  $\tau$ .

$$l = \frac{c_p c_e \tau}{c_e - c_p} E \left( \frac{P + \sigma_Y \left(1 + \lambda/2\mu\right)}{4\sigma_Y \left(1 + \lambda/2\mu\right) \cdot \frac{c_p}{c_e + c_p}} \right)$$

où  $E()$  désigne la fonction partie entière.

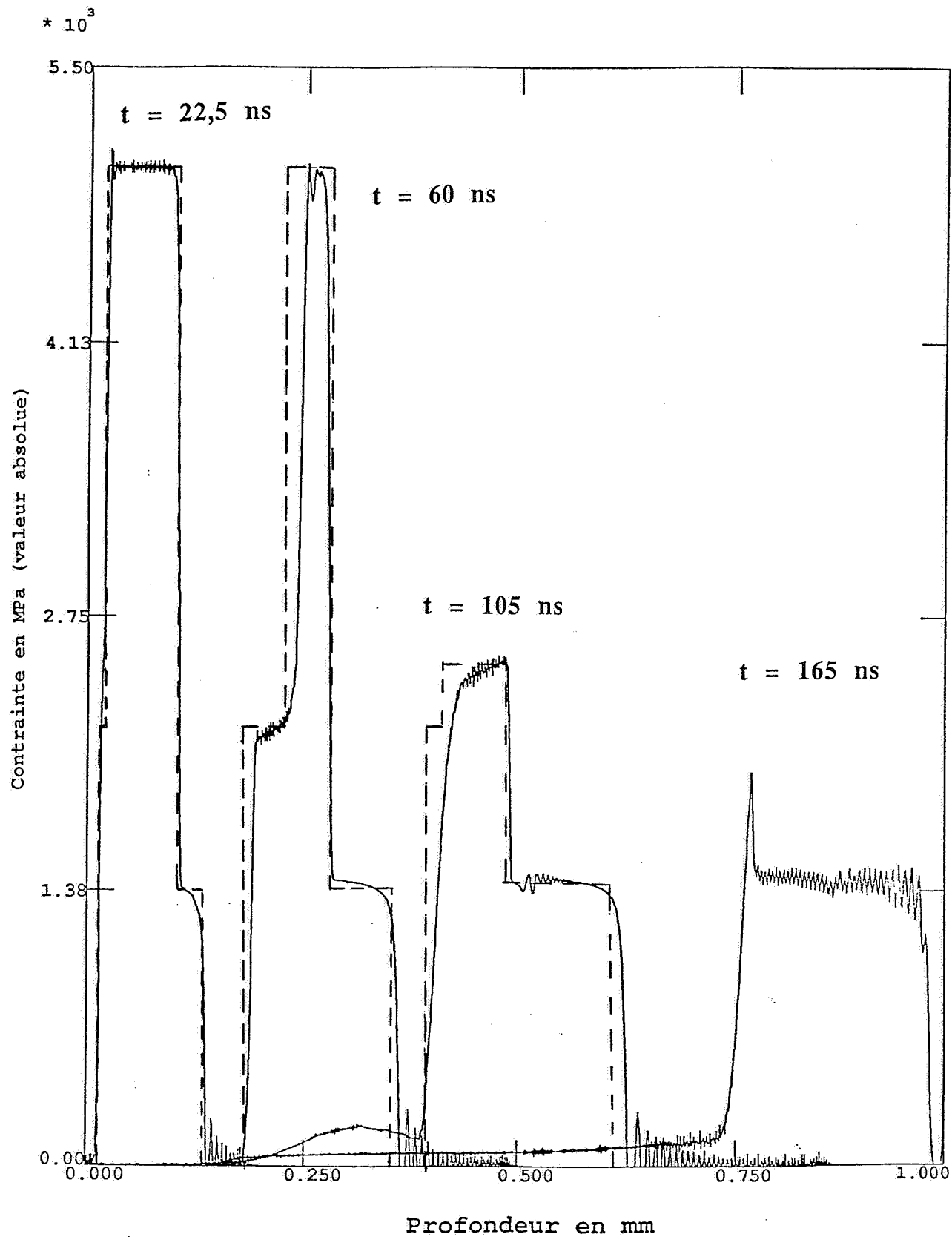
En Annexe D, on décrit un code de calcul par éléments finis en élasto-plasticité et en élasto-viscoplasticité

dynamique. Un calcul mené à l'aide de ce code est représenté ci-après. Il s'agit du calcul de la réponse d'un acier élasto-parfaitement plastique de limite d'élasticité 870 MPa sollicité par une pression 'créneau' ( $P = 5000$  MPa,  $\tau = 20$  ns) en surface.



Superposons maintenant à ce résultat, le résultat du calcul analytique par la méthode des caractéristiques. On constate que l'accord est relativement bon.

## ONDE DE CONTRAINTE LONGITUDINALE



Tue Jul 10 18:03:30 1990

## Prise en compte de l'écrouissage cinématique linéaire

Toute l'analyse précédente reste valide à l'exception de l'écriture du critère de plasticité. Le système différentiels régissant la propagation devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= 0 \quad \text{si} \quad \left| \sigma_r - \sigma_x - \frac{3C}{2} \epsilon^p \right| < \sigma_Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \cdot \frac{1+3C/2\mu}{1+C/2\mu} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= 0 \quad \text{et} \quad \left| \sigma_r - \sigma_x - \frac{3C}{2} \epsilon^p \right| = \sigma_Y \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

En fait, on s'aperçoit que le résultat du calcul par la méthode des caractéristiques est absolument identique au précédent, la seule différence n'apparaissant qu'au niveau de la valeur de la célérité de l'onde plastique. Celle-ci vaut :

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + \frac{2\mu}{3} \cdot \frac{1+3C/2\mu}{1+C/2\mu}}{\rho}}$$

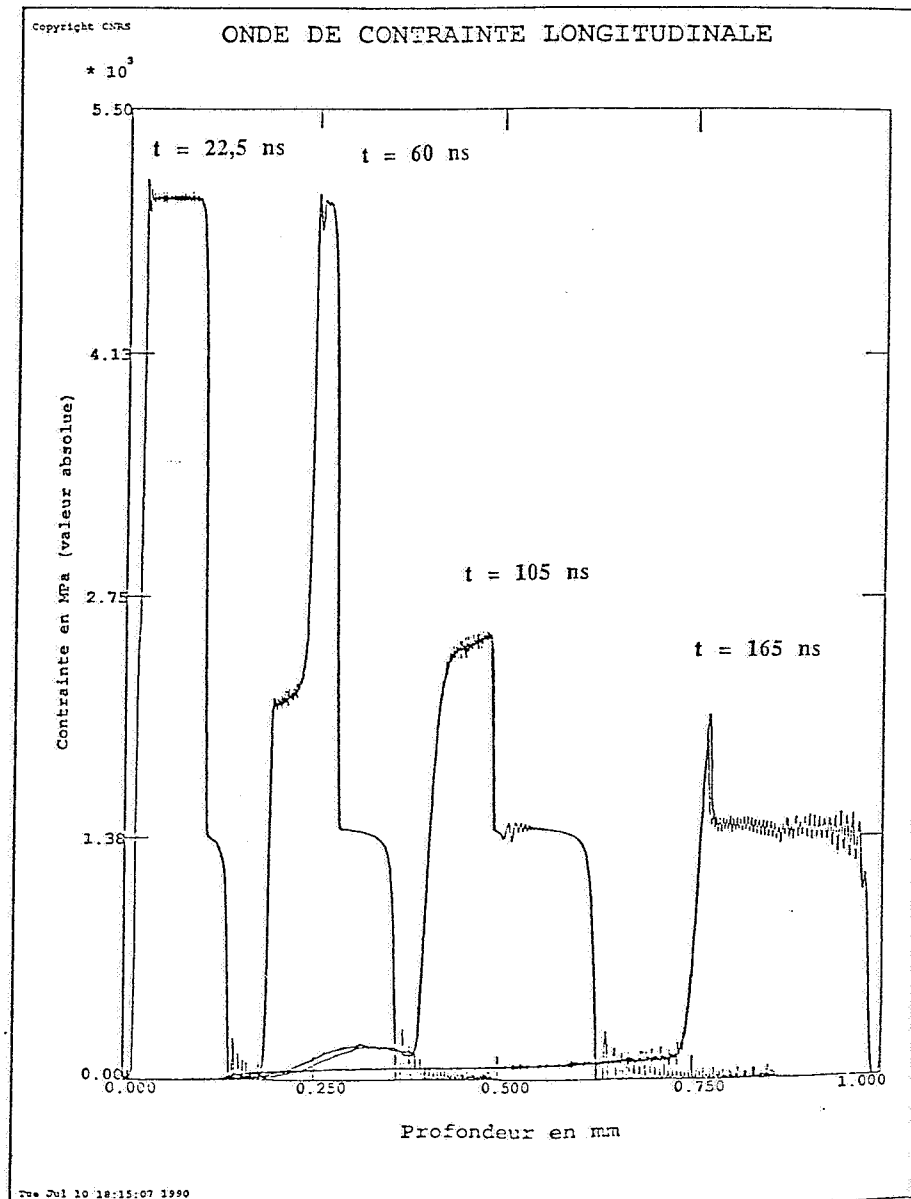
On remarque que la présence d'un écrouissage augmente la célérité de l'onde plastique alors que la célérité de l'onde élastique reste inchangée. La célérité plastique est une fonction croissante du module d'écrouissage. On en déduit que *plus le module d'écrouissage est important, plus la profondeur affectée est grande*. Supposons C très petit devant  $\mu$ . La célérité se réécrit :

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + \frac{2\mu}{3} (1+C/\mu)}{\rho}}$$

Ceci implique que si la condition :

$$C \ll \mu$$

est vérifiée, alors l'influence de l'écrouissage cinématique linéaire est tout à fait négligeable sur la propagation de l'onde. C'est le cas des aciers 35CD4 30 HRC et 50HRC (v. valeurs numériques du chapitre 1). A titre de confirmation, on représente un calcul similaire au précédent ( $P=5000$  MPa,  $\tau=20$  ns) sur un acier 35CD4 30 HRC ( $\sigma_Y=870$  MPa) pour lequel on a pris successivement un module d'écrouissage nul et un module égal à sa valeur réelle (2600 MPa). Les résultats des deux calculs sont superposés et on remarque que sauf sur le dernier dessin ( $t = 165$  ns) l'écart est imperceptible.





## Prise en compte de la viscoplasticité

En conséquence de l'analyse précédente, on néglige l'écroutissage et on suppose le matériau élasto-parfaitement viscoplastique. Les équations s'écrivent :

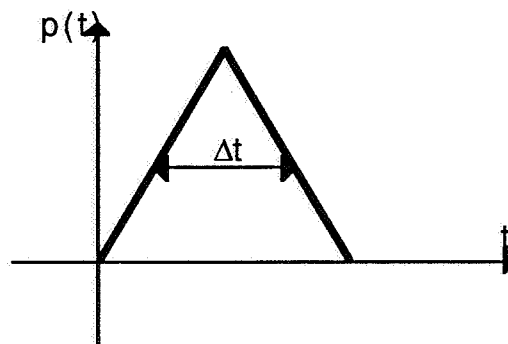
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad \text{si} \quad |\sigma_r - \sigma_x| < \sigma_Y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= 0 \\ -\lambda \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} &= \frac{2}{3\eta} (\sigma_x - \sigma_r) \end{aligned} \quad \text{sinon.}$$

Considérons un front de charge en  $\sigma_x$ , en régime viscoplastique, l'équation d'évolution de la déformation plastique s'écrit :

$$\frac{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)}{\lambda + 2\mu/3} \dot{\varepsilon}^p + \varepsilon^p = \frac{2 \sigma_x}{3\lambda + 2\mu}$$

Si  $\eta$  est nul, on retrouve l'équation d'évolution en élasto-plasticité et les autres équations ne sont pas modifiées. Considérons une impulsion de pression 'triangulaire' :



Alors, si la condition :

$$\Delta t \gg \frac{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)}{\lambda + 2\mu/3}$$

est vérifiée (cas du matériau décrit au chapitre 1), les *phénomènes visqueux sont négligeables*. En effet, la solution de l'équation ci-dessus est alors très proche de l'équation élasto-plastique ( $\eta=0$ ). Cette considération un peu heuristique est confirmée par les résultats numériques qui suivent et sera précisée au chapitre suivant.

Application numérique : dans le cas d'un acier, les phénomènes visqueux sont négligeables dès que la largeur à mi-hauteur  $\Delta t$  de l'impulsion de pression vérifie :

$$\Delta t \gg 1 \text{ ns } (10^{-9} \text{ s})$$

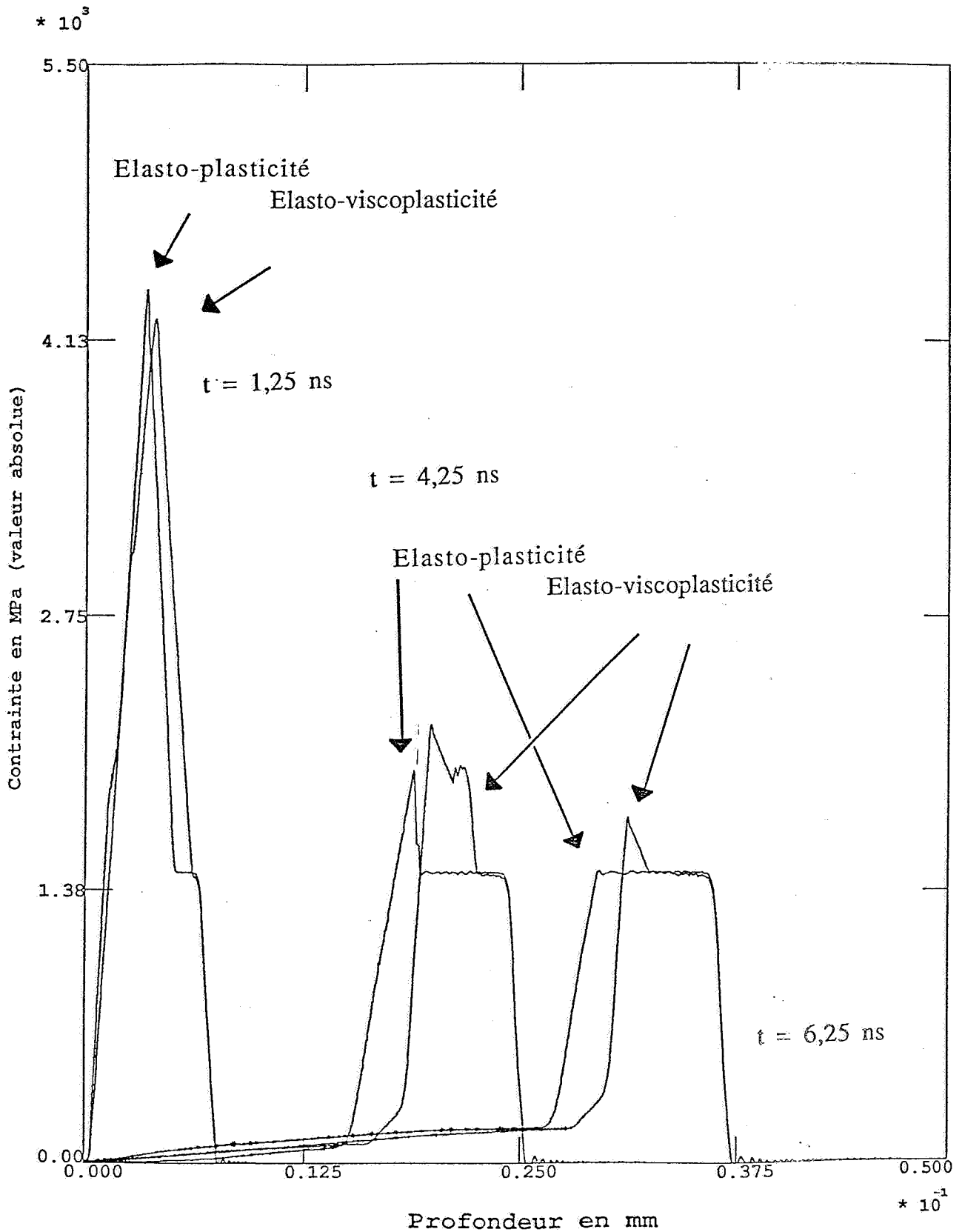
On représente ci-après la réponse d'un acier sans écrouissage de limite d'élasticité 870 MPa, à des sollicitations 'triangulaires' de largeur à mi-hauteur 0,6 3 et 30 ns. La pression appliquée a dans tous les cas une amplitude de 50 kBars (5000 MPa). Dans chacun des cas, on compare les cas de l'élasto-plasticité et de l'élasto-viscoplasticité ( $\eta=100 \text{ Pa.s}$ ).

On constate que dans les cas de 3 et 30 ns de largeur à mi-hauteur, les effets visqueux sont totalement négligeables. Par contre, lorsque l'on descend en dessous de la nanoseconde (largeur à mi-hauteur de 0,6 ns) les résultats du calcul viscoplastique se démarquent des résultats élasto-plastiques. On remarque que le front de l'onde a tendance à 's'étaler' et que l'amortissement est plus rapide au début de la propagation et plus lent à la fin que dans le cas de l'élasto-plasticité.

$$\Delta t = 0,6 \text{ ns}$$

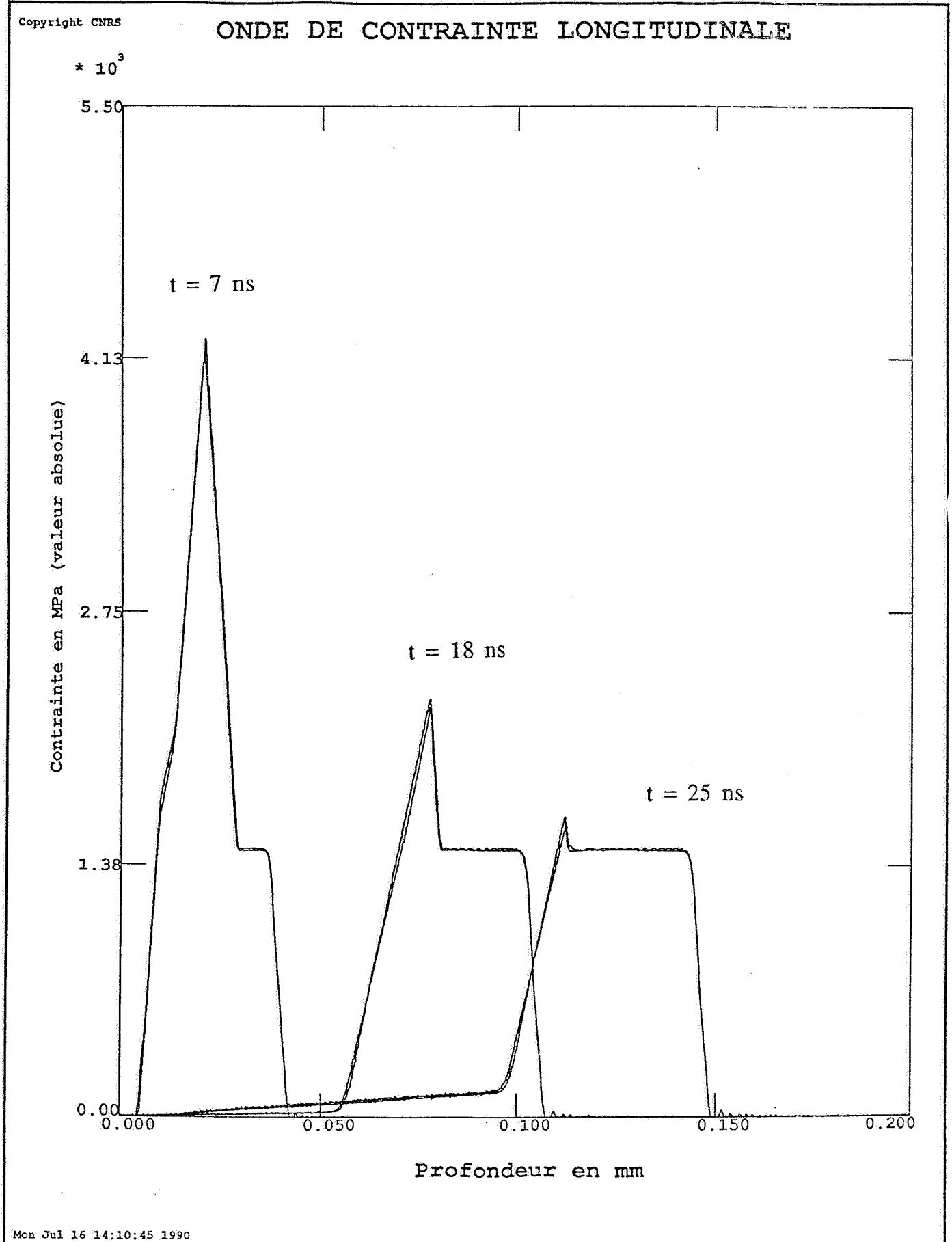
Copyright CNRS

## ONDE DE CONTRAINTE LONGITUDINALE



Mon Jul 16 12:47:41 1990

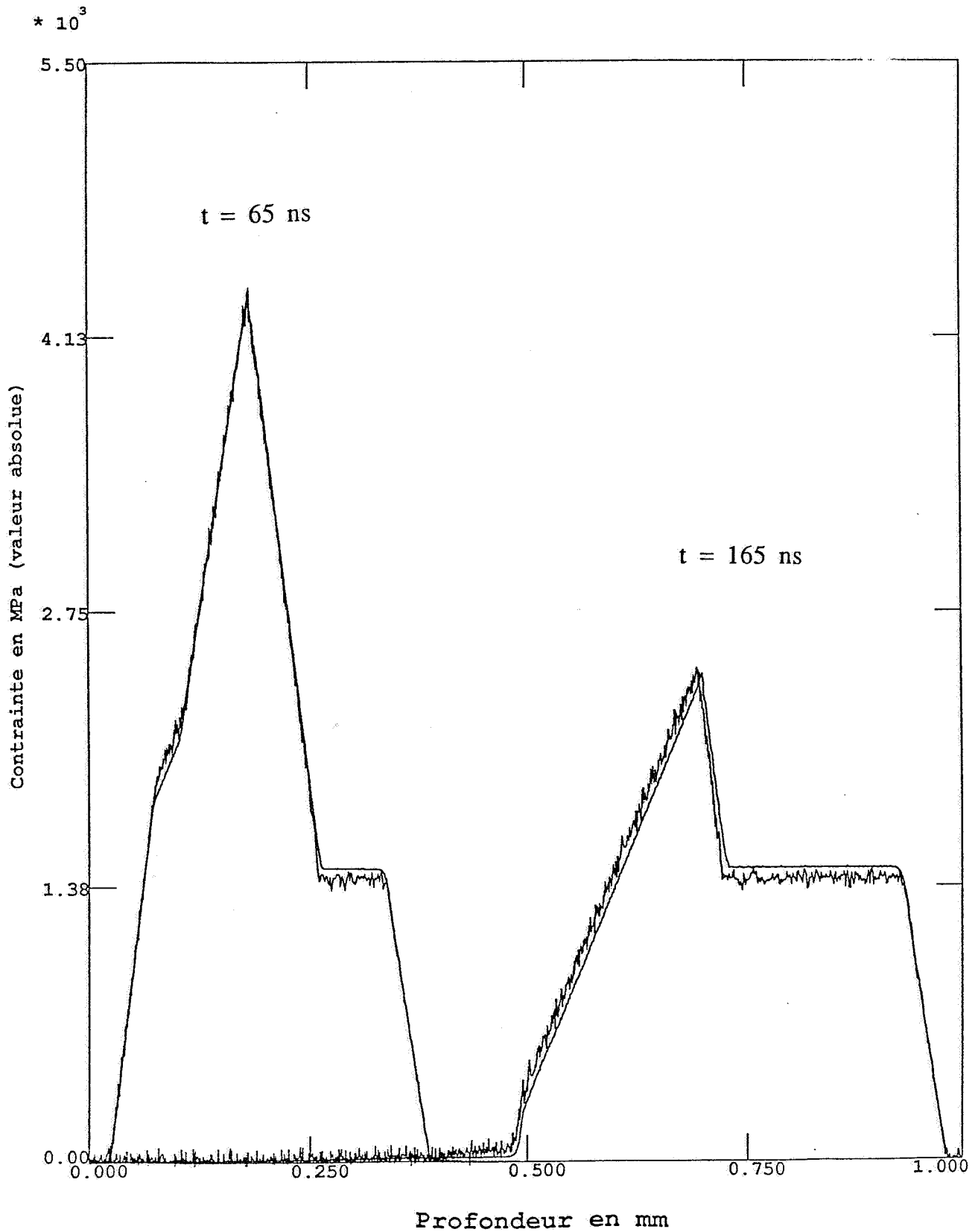
$$\Delta t = 3 \text{ ns}$$



$$\Delta t = 30 \text{ ns}$$

Copyright CNRS

# ONDE DE CONTRAINTE LONGITUDINALE

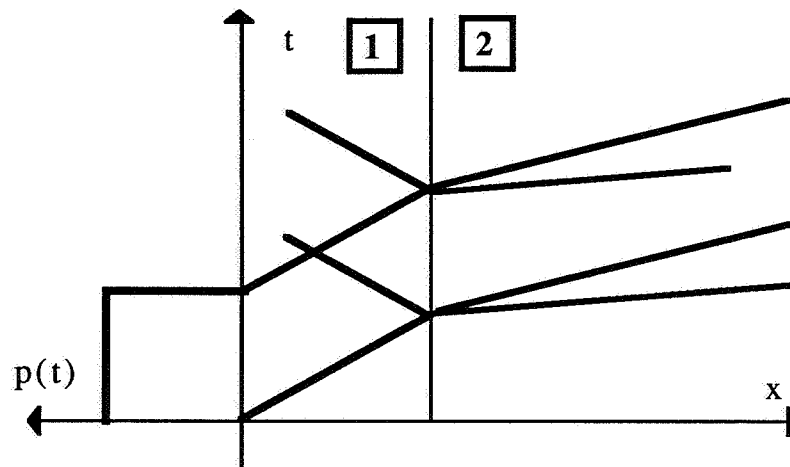


Mon Jul 16 14:16:45 1990

Ceci dit, on peut conclure que dans le cas des aciers 35CD4 30 et 50 HRC et pour des impulsions de pression de largeur à mi-hauteur supérieure à 1 ns, *l'écrouissage et la viscosité sont totalement négligeables pour l'analyse de la propagation.*

### Cas d'une interface entre un milieu élastique et un milieu élasto-plastique

On peut faire l'analyse de la même manière que précédemment par la méthode des caractéristiques :



Si :

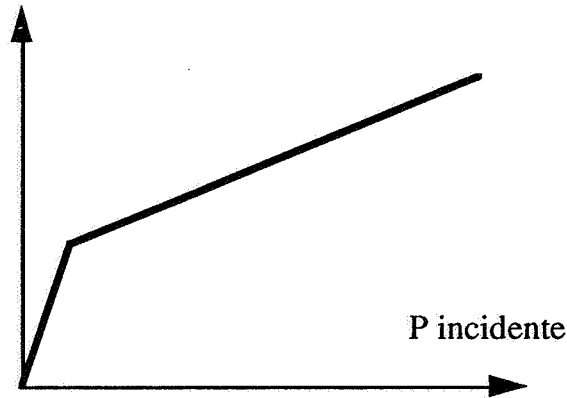
$$P \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_1 c_{el,1}}{\rho_2 c_{el,2}} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_2}{2\mu_2} \right) \sigma_{Y,2}$$

le matériau 2 n'est pas plastifié et l'on est renvoyé à l'interface entre deux matériaux élastiques décrit précédemment. Au contraire, si la pression excède cette limite, du point de vue du matériau 2, tout se passe comme si on lui appliquait en surface une pression d'amplitude :

$$P \frac{2\rho_2 c_{pl,2}}{\rho_1 c_{el,1} + \rho_2 c_{pl,2}} + \left(1 + \frac{\lambda_2}{2\mu_2}\right) \sigma_{Y,2} \left(1 - \frac{c_{pl,2}}{c_{el,2}}\right) \frac{\rho_1 c_{el,1}}{\rho_1 c_{el,1} + \rho_2 c_{pl,2}}$$

La taux de transmission de la pression dans le matériau 2 diminue donc avec l'apparition de la plasticité dans ce matériau. On a la courbe de transmission suivante :

P transmis dans 2



**Cas d'une interface entre un milieu plastique de limite d'élasticité nulle et un milieu élasto-plastique**

Remarquons d'abord que l'analyse en élasto-plasticité nous permet de conclure qu'il n'y a pas d'amortissement de l'onde plastique dans un matériau élasto-plastique de limite d'élasticité nulle. L'analyse est donc la même que la précédente, sauf qu'il faut prendre la célérité plastique dans le milieu 1. Le diagramme caractéristique est identique et pour le milieu 2, tout se passe comme si on lui appliquait en surface une pression égale à :

$$P \frac{2\rho_2 c_{pl,2}}{\rho_1 c_{pl,1} + \rho_2 c_{pl,2}} + \left(1 + \frac{\lambda_2}{2\mu_2}\right) \sigma_{Y,2} \left(1 - \frac{c_{pl,2}}{c_{el,2}}\right) \frac{\rho_1 c_{pl,1}}{\rho_1 c_{pl,1} + \rho_2 c_{pl,2}}$$

## 1.5. Retour sur l'Hypothèse des Petites Perturbations

On peut montrer (v. chapitre suivant pour plus de détails) que dans le cas de fortes pression, la déformation maximale est peu différente de :

$$\varepsilon_{\max} = \frac{P}{\lambda + 2\mu/3}$$

L'analyse précédente n'est donc valide que pour des pressions ne dépassant pas :

$$0,1\left(\lambda + 2\mu/3\right)$$

Application numérique : dans le cas des aciers, pour que l'analyse précédente s'applique, la pression en surface ne doit pas excéder :

$$17000 \text{ MPa} \quad \text{ou} \quad 170 \text{ kBars}$$

Dans le cas de l'aluminium, cette limite vaut :

$$7000 \text{ MPa} \quad \text{ou} \quad 70 \text{ kBars}$$

## 2. Analyse hydrodynamique

Dans l'analyse précédente, il n'a nulle part été question de thermodynamique. En effet, le cadre était celui de l'élasto-plasticité isotherme. De fait, Ya. B. Zel'dovich a montré (v. [5] p. 719) par l'analyse thermodynamique de la compression dynamique d'un solide que tant que la déformation dans l'onde reste petite, l'échauffement associé au passage de l'onde est négligeable (accroissement de température inférieur à 10%). Il est remarquable de constater que l'apparition des effets thermodynamiques coïncide avec la non-vérification de l'Hypothèse des Petites Perturbations. Lorsque l'amplitude de l'impact devient grande, beaucoup de difficultés apparaissent en même temps. Ces problèmes sont

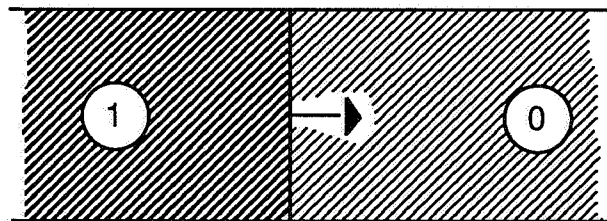


habituellement traités (v. [4] et [5]) par l'utilisation d'un formalisme dit hydrodynamique calqué sur celui de la Mécanique des Fluides. Cette idée repose sur le fait qu'à très haute pression le comportement d'un solide tend vers celui d'un fluide. Cette analyse permet de prendre en compte facilement certains aspects hydrodynamiques mais difficilement la plasticité. Elle peut cependant être greffée de manière un peu artificielle et la théorie correspondante donne de bons résultats quant à l'analyse des expériences. Néanmoins il subsiste dans cette théorie des incohérences.

## 2.1. Présentation du formalisme

On suppose toujours que les ondes induites sont longitudinales. La densité locale  $\rho(x,t)$  caractérise alors complètement la déformation du milieu. On continue d'appeler  $\sigma_x$  la contrainte longitudinale.

Considérons un front d'onde se propageant à la célérité  $c$  séparant le milieu en deux zones (à un instant donné) 1 et 0 de densités différentes.



Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au travers du front d'onde s'écrivent :

$$\begin{aligned}\rho_1(c - v_1) &= \rho_0(c - v_0) \\ \sigma_{x,1} - \sigma_{x,0} &= \rho_0(c - v_0)(v_0 - v_1) \quad (\sigma_x < 0)\end{aligned}$$

Ces équations portent le nom de Rankine & Hugoniot.

Remarquons que pour les pressions faibles correspondant au domaine de l'élasticité linéaire (où, rappelons-le, du fait de l'Hypothèse des Petites Perturbations, la densité est

supposée constante) la vitesse matérielle est négligeable devant la célérité de l'onde, on retrouve l'équation :

$$[\sigma_x] = -\rho c[v]$$

Ces équations ne sont donc pas contradictoires avec l'analyse en Mécaniques des Solides.

Il faut ajouter aux équations de Rankine & Hugoniot une loi de comportement prenant en compte les effets thermodynamiques. Or, des études expérimentales réalisées sur un très grand nombre de corps condensés montrent que la vitesse de l'onde varie linéairement avec la vitesse matérielle et ce sur un domaine de pression étendu :

$$c = c_0 + S.v$$

A titre indicatif, pour l'acier, on a:

$$c_0 = 3800 \text{ m.s}^{-1} \quad S = 1,58$$

et pour l'aluminium :

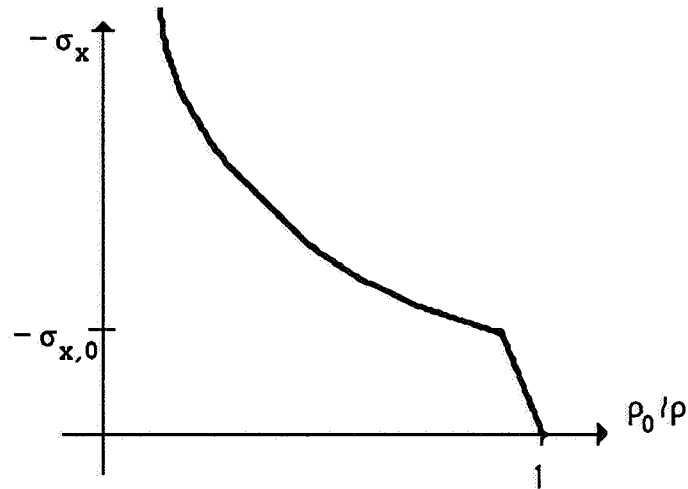
$$c_0 = 5200 \text{ m.s}^{-1} \quad S = 1,35$$

Cette dernière équation, associée aux deux équations de Rankine & Hugoniot permet d'exprimer l'amplitude de l'onde en fonction de la densité derrière le front de l'onde (en supposant qu'elle se propage dans un milieu initialement au repos). Il vient :

$$\sigma_x - \sigma_{x,0} = -\rho_0 c_0^2 \frac{1 - \rho_0/\rho}{(1 - S(1 - \rho_0/\rho))^2} \quad (\sigma_x < \sigma_{x,0} < 0)$$

$\sigma_{x,0}$  et  $\rho_0$  sont la contrainte et la densité dans le milieu en amont de l'onde. Il s'agit en général de la limite d'élasticité d'Hugoniot et de la densité après compression élastique qui est très peu différente de la densité au repos. Cette

courbe s'appelle 'adiabatique dynamique d'Hugoniot' et a la forme suivante (notamment au niveau de la concavité) :



## 2.2. Application à l'analyse de la propagation d'un front d'onde

On peut alors décrire complètement la propagation d'un front d'onde. En effet, les équations de Rankine & Hugoniot impliquent :

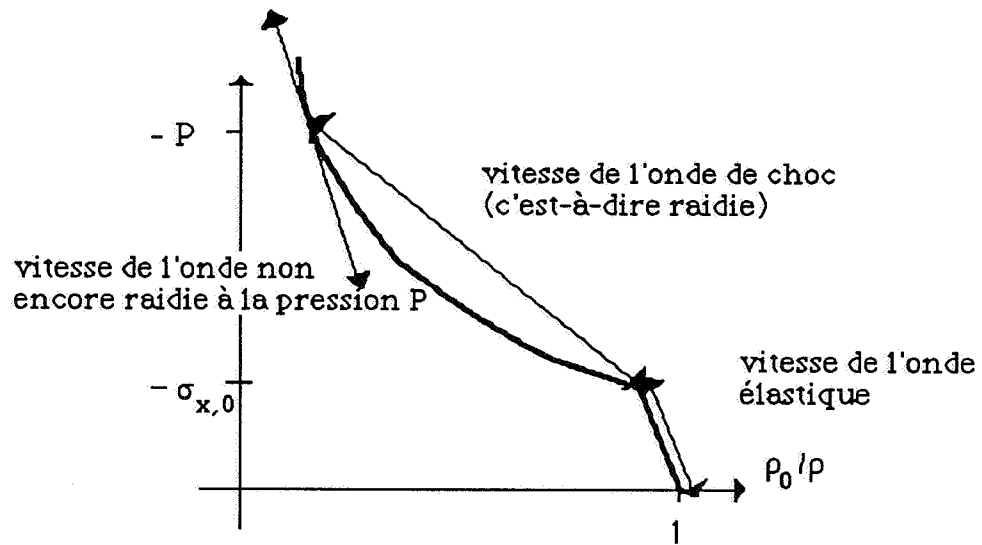
$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_x}{\partial (\rho_0/\rho)}}$$

La célérité est la racine carrée de la pente de l'Hugoniot à la pression considérée. On lit alors sur l'Hugoniot qu'au-dessus de  $\sigma_{x,0}$ , la célérité de l'onde est une fonction croissante de la valeur absolue de la contrainte. Le front d'onde se raidit et sa célérité prend la valeur d'équilibre :

$$c = \sqrt{\frac{-\sigma_x + \sigma_{x,0}}{\rho_0^2 \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right)}}$$

Cette valeur a encore été obtenue à l'aide des équations de Rankine & Hugoniot. En d'autre termes, on 'voit' sur l'Hugoniot, la vitesse de l'onde élastique, la vitesse de l'onde plastique non encore raidie et ce à une pression quelconque et enfin, on voit la vitesse de l'onde de choc

(c'est-à-dire raidie) : c'est la pente de la corde appelée droite de Rayleigh.



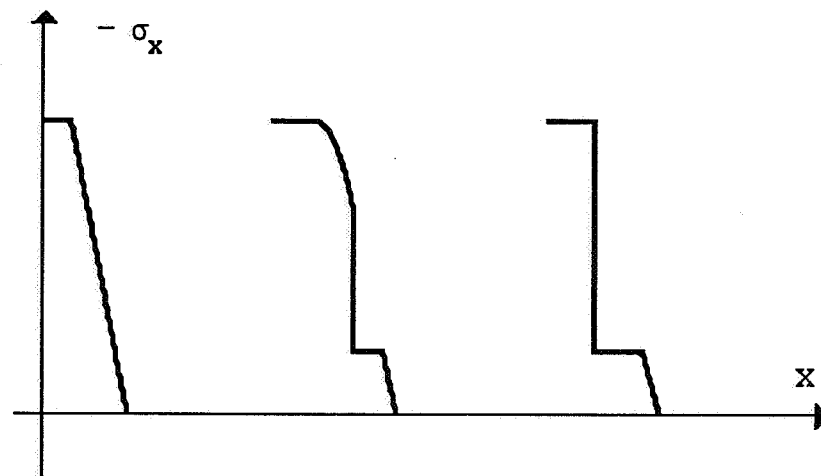
On voit sur cette figure qu'il existe une pression limite au-dessus de laquelle l'onde choc se propage plus vite que l'onde élastique qui disparaît donc. Cette pression vaut :

$$P = \frac{\rho_0 c_{el}^2}{S} \left(1 - \frac{c_0}{c_{el}}\right)$$

Application numérique : Pour l'acier, la pression de disparition de l'onde élastique vaut approximativement :

600 kBars ou 60 GPa

Pour résumer, l'évolution d'un front de charge à très haute pression dans un solide est la suivante :



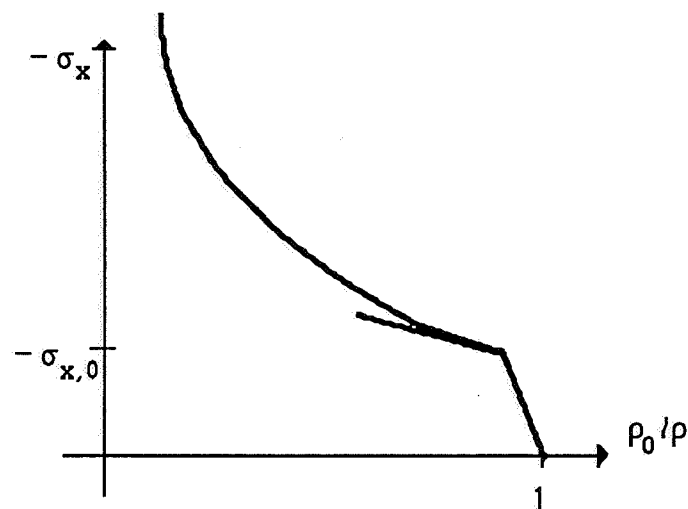
Avant de poursuivre en analysant la propagation du front de détente, il est intéressant de vérifier si aux faibles déformations, on retrouve bien les mêmes résultats qu'en élasto-plasticité. Pour cela, il faut relier la déformation totale à la densité. En déformation uniaxiale, ce problème est simple et l'on a :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon < 0)$$

L'équation de l'Hugoniot devient :

$$\sigma_x - \sigma_{x,0} = \rho_0 c_0^2 \frac{\varepsilon}{(1 + S\varepsilon)^2}$$

Lorsque la déformation reste petite devant 1 (ou plutôt  $1/S$ ), l'Hugoniot se confond à sa tangente et l'on retrouve strictement le comportement élasto-plastique isotherme décrit plus-haut (célérité de l'onde plastique indépendante de la contrainte).



Il reste à vérifier que, pour l'aluminium par exemple (il a l'avantage de ne pas présenter de changements de phase), la pente de la loi de comportement dans le domaine plastique et la pente de la tangente à l'Hugoniot ont même valeur numérique :

La pente de la loi de comportement vaut :

$$\lambda + 2\mu/3 \quad \text{soit} \quad 70 \text{ GPa}$$

La pente de la tangente à l'Hugoniot vaut :

$$\rho_0 c_0^2 \quad \text{soit} \quad 73 \text{ GPa}$$

L'accord est donc correct. Dans le cas de l'acier, on ne peut procéder à la même vérification. En effet, il se produit vers 130 kBars un changement de phase et l'on ne peut pas extrapoler le comportement aux pressions inférieures à 130 kbars du comportement à haute pression. En fait, s'il n'y a pas de changement de phase, l'introduction du paramètre  $c_0$  est redondant par rapport à l'analyse précédente puisqu'il s'agit de la célérité de l'onde plastique à faible pression que l'on sait calculer à l'aide des paramètres élastiques du matériau.

$$c_0 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}}$$

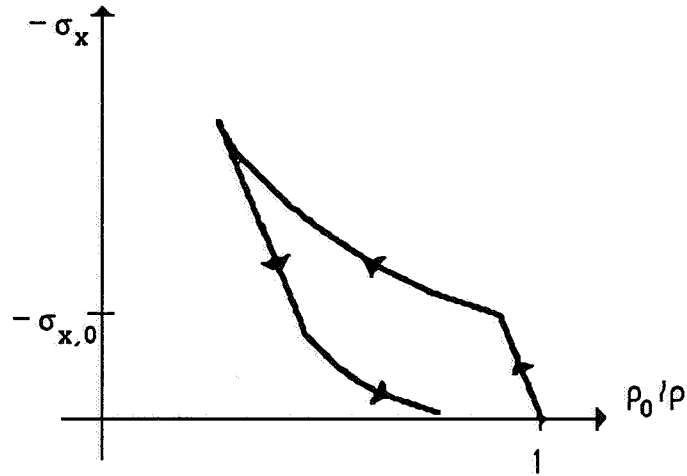
ce qui, pour l'acier, donnerait  $4600 \text{ m.s}^{-1}$  au lieu de  $3800 \text{ m.s}^{-1}$ .

D'un point de vue phénoménologique, signalons qu'un choc à très haute pression s'accompagne d'une grosse élévation de température qui au passage de l'onde détruit l'ordre cristallin. A très haute pression, le comportement d'un solide sous choc se rapproche de celui d'un gaz très dense. Le formalisme ci-dessus permet de quantifier grossièrement ce changement progressif de comportement.

### 2.3. Application à l'analyse de la propagation du front de détente

Aux pressions relativement modérées (nous donnerons bientôt une signification à cette phrase), le milieu se comporte encore comme un solide et l'on va avoir comme précédemment une décharge élastique se

propageant à  $c_{el}$  et d'amplitude  $2\sigma_{x,0}$ . Le trajet dans le plan  $(P, \rho)$  est alors le suivant :



Notons que la vitesse de la décharge plastique est d'autant plus élevée que la pression l'est. Le front de détente va donc avoir tendance à s'étaler. De plus, il existe une pression limite, pour laquelle la décharge plastique se propage plus vite que la détente élastique qui n'existe alors plus. C'est la pression telle que :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial (\rho_0/\rho)}} = c_{el}$$

Après calcul, cette pression vaut :

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{s} \cdot \frac{1 - \left( \frac{c_0^2}{c_{el}^2} + \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}} \right)^{1/3} - \left( \frac{c_0^2}{c_{el}^2} - \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}} \right)^{1/3}}{\left( \frac{c_0^2}{c_{el}^2} + \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}} \right)^{2/3} + \left( \frac{c_0^2}{c_{el}^2} - \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}} \right)^{2/3} - \frac{2c_0^2}{3c_{el}^2}}$$

Dans l'acier cette pression vaut :

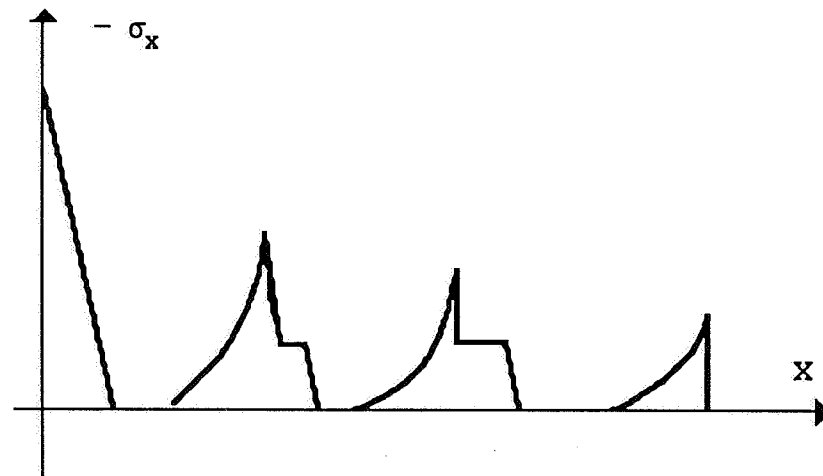
$$250 \text{ kBars} \quad (25000 \text{ MPa})$$

et dans l'aluminium, elle vaut :

$$70 \text{ kBars} \quad (7000 \text{ MPa})$$

Au-delà, on peut négliger les effets dûs à la plasticité, on est alors en régime hydrodynamique pur. Dans ce régime,

l'amortissement est fonction de l'angle au maximum de pression entre la tangente à l'Hugoniot et la droite de Rayleigh. Or, cet angle diminue au fur et à mesure que la pression baisse (v. forme de l' Hugoniot). En régime hydrodynamique, on a donc un amortissement extrêmement rapide sur les premières unités de distance de propagation et cet amortissement se ralentit par la suite, une fois que l'onde s'est un peu atténuée.

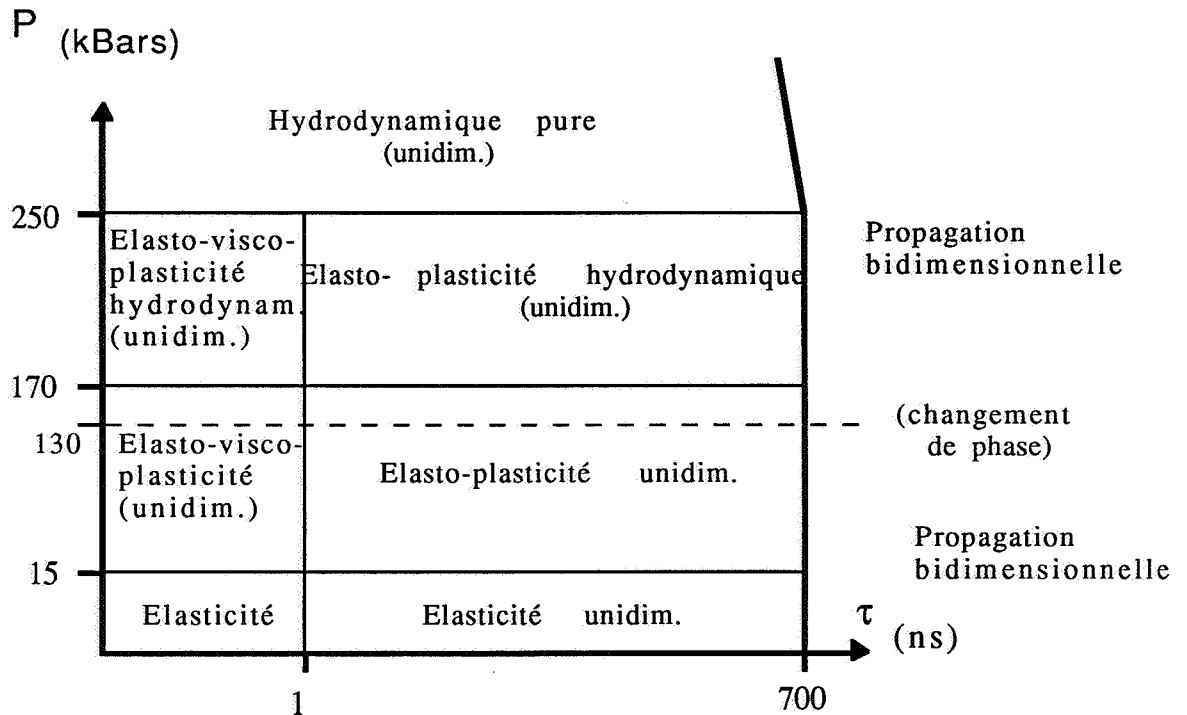


Ce que l'on a appelé le régime hydrodynamique pur est consistant sur le plan théorique. Des problèmes apparaissent pour le régime élasto-plastique hydrodynamique. En effet, on utilise alors une description hydrodynamique sur laquelle on vient greffer les parties déviatoriques des tenseurs tels qu'ils ont été déterminé en Mécanique des Solides des Petites Perturbations alors que justement l'Hypothèse des Petites Perturbations n'est plus applicable. Néanmoins, si ce formalisme est contestable sur le plan théorique, il n'en reste pas moins que ses prédictions sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.



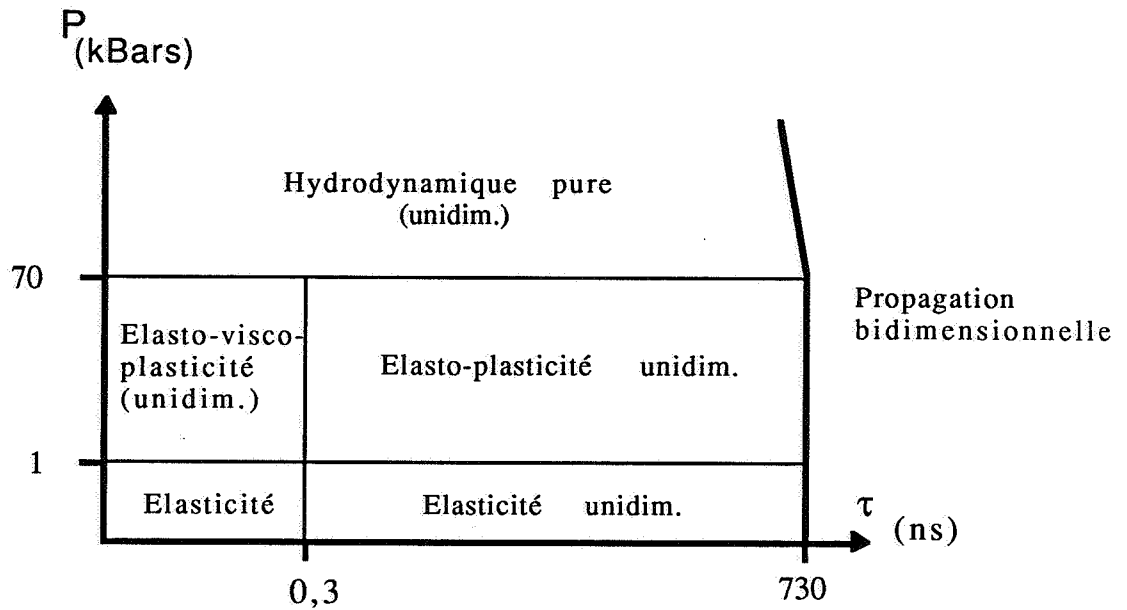
## Conclusion

On a essayé dans cette partie de décrire la réponse d'un métal à une sollicitation d'amplitude quelconque. A faible pression, le métal se comporte complètement comme un solide et la mécanique des solides permet de décrire complètement ce qui se passe. A très haute pression, le comportement du solide se rapproche de celui du fluide, et un formalisme dérivé de la mécanique des fluides permet d'appréhender ces phénomènes. A pression intermédiaire, les deux théories s'interpénètrent. A titre indicatif, voici les domaines d'application des diverses théories dans le cas de l'acier subissant un impact d'amplitude  $P$  et de durée  $\tau$  et de rayon 4 mm :



La limite des 15 kBars peut être très variable d'un acier à l'autre en fonction notamment des traitements thermiques qu'il a pu subir.

De même, dans le cas d'un aluminium subissant un impact d'amplitude  $P$  et de durée  $\tau$  et de rayon 4 mm, on a :



Là encore, la limite d'élasticité d'Hugoniot dépend beaucoup de l'histoire thermique du matériau et la valeur de 1 kBar donnée n'est qu'indicative.

D'une manière plus générale, pour un matériau quelconque et en conservant les notations de ce chapitre, les limites d'applications de chacune des théories sont données dans le tableau suivant. Elles concernent un métal quelconque subissant un impact d'amplitude  $P$  et de durée  $\tau$  et de rayon  $r_0$  :

$\tau$	Valeur au-delà de laquelle on peut négliger la viscosité.	$\frac{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)}{\lambda + \frac{2\mu}{3}}$
	Valeur en deçà de laquelle la propagation est unidimensionnelle (impact rapide)	$r_0 \sqrt{\frac{\rho(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$

<b>P</b>	Limite d'élasticité d'Hugoniot	$\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \sigma_Y$
	Valeur en deçà de laquelle on peut négliger les effets thermodynamiques	$0,1(\lambda + 2\mu/3)$
	Valeur au-delà de laquelle on peut négliger la plasticité	$\frac{\rho_0 c_0^2}{S} \cdot \frac{1 - \left(\frac{c_0^2}{c_{el}^2} + \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}}\right)^{1/3} - \left(\frac{c_0^2}{c_{el}^2} - \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}}\right)^{1/3}}{\left(\frac{c_0^2}{c_{el}^2} + \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}}\right)^{2/3} + \left(\frac{c_0^2}{c_{el}^2} - \sqrt{\frac{c_0^4}{c_{el}^4} + \frac{c_0^6}{27c_{el}^6}}\right)^{2/3} - \frac{2c_0^2}{3c_{el}^2}}$
	Valeur au-delà de laquelle disparaît le précurseur élastique	$\frac{\rho_0 c_{el}^2}{S} \left(1 - \frac{c_0}{c_{el}}\right)$

## Références

- [1] J. Mandel, "Ondes Plastiques dans un Milieu Indéfini à Trois Dimensions", Journal de Mécanique, 1962.
- [2] N. Cristescu, "Dynamic Plasticity", North Holland, 1967.
- [3] W. Nowacki, "Stress Waves in non Elastic Solids", Pergamon Press, 1978.
- [4] Pei Chi Chou & A. K. Hopkins, "Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading", 1972.
- [5] Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raiser, "Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena", Academic Press, New York, 1966.
- [6] F. Cottet, "Etude des Caractéristiques d'une Onde de Choc de très Haute Pression Induite par Impulsion Laser dans une Cible Solide", thèse de l'Université de Poitiers, 1985.





## **Chapitre 3**

# **Calcul de la déformation plastique induite par impact rapide d'amplitude limitée dans un métal**

## **Introduction**

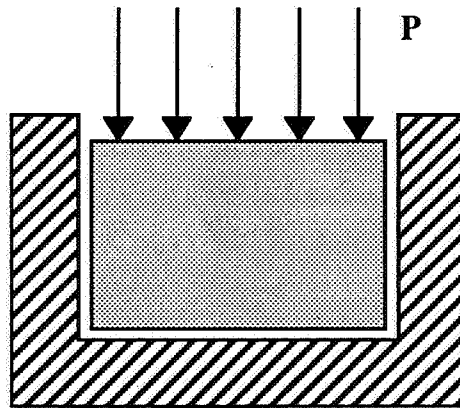
Dans le chapitre 1, on a donné une description rhéologique générale d'un métal sans changement de phase. Dans le chapitre 2, on a analysé la réponse détaillée de ce métal à une sollicitation de type impact rapide. On a vu que la théorie de l'élasto-plasticité isotherme en Petites Perturbations s'appliquait à condition que la pression appliquée soit d'amplitude limitée de manière à pouvoir négliger les effets thermodynamiques. On appellera impact rapide d'amplitude limitée un tel impact. L'objet de ce chapitre est de décrire, le plus complètement possible la déformation plastique induite par une sollicitation de ce type.

### **1. Evaluation de la déformation plastique juste après le passage de l'onde**

Dans le chapitre précédent, on a décrit en général la propagation d'une onde induite par impact rapide dans un métal. On a montré que si le temps d'application du chargement en surface reste faible, le problème est unidimensionnel car la déformation totale associée au passage de l'onde à un point à l'intérieur du milieu est uniaxiale. Avant de s'attaquer au problème dynamique, nous allons

donc regarder un problème d'école qui est la compression élasto-plastique uniaxiale quasistatique.

Considérons, en effet, un cylindre (pas forcément de révolution) de matière assujetti à une déformation uniaxiale. On peut, par exemple, supposer qu'il est enfermé dans un moule indéformable dans lequel, il peut coulisser sans frottement. Nous supposons l'échelle de temps d'application du chargement infiniment longue ou, ce qui revient au même, la densité du milieu nulle. De cette manière, on peut négliger les forces d'inertie.



De la même manière que dans le chapitre précédent, les tenseurs de déformation totale, de déformation plastique et de contrainte ont la forme suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix}$$

Les relations de comportement s'écrivent toujours :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \cdot \varepsilon + \mu \cdot \varepsilon^p \\ \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon - 2\mu \cdot \varepsilon^p \end{aligned}$$



A ces équations, il faut ajouter le critère de plasticité :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= 0 & \text{si} & \quad |\sigma_r - \sigma_x| < \sigma_Y \\ |\sigma_r - \sigma_x| &= \sigma_Y & \text{sinon.} \end{aligned}$$

et le fait que la divergence du tenseur des contraintes est nulle (analyse quasi-statique) :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$

De cette dernière équation associée aux deux premières, on déduit qu'à chaque instant, les quatre grandeurs scalaires  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^p$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_r$  caractérisant l'état du milieu sont homogènes dans tout le milieu.  $\sigma_x$  est en tout point dans le milieu égal à l'opposé de la pression appliquée en surface.

On applique maintenant une pression, suffisamment élevée pour plastifier, à la surface du milieu. On appelle P sa valeur maximum. Calculons la réponse du milieu :

#### Analyse de la charge

- $\sigma_x$  varie de 0 à  $-\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  : on est en régime élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y.(\lambda/2\mu)$$

$$\varepsilon = -\sigma_Y/2\mu$$

$$\varepsilon^p = 0$$

- $\sigma_x$  varie de  $-\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  à -P : on est en régime plastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -P$$

$$\sigma_r = -P+\sigma_Y$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_Y}{2\mu} - \frac{P - (1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{P - (1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

## Analyse de la décharge

Deux cas se présentent :

$$1) \sigma_Y.(1+\lambda/2\mu) < P < 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

- $\sigma_x$  varie de  $-P$  à  $0$  : la décharge est entièrement élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y} - 1 \right)$$

$$\varepsilon = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y} - 1 \right)$$

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y} - 1 \right)$$

$$2) P > 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

- $\sigma_x$  varie de  $-P$  à  $-P+2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  : on est en régime élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -P+2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

$$\sigma_r = -P+(1+\lambda/\mu).\sigma_Y$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_Y}{2\mu} - \frac{P - (1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{P - (1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

- $\sigma_x$  varie  $-P+2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  à  $0$  : on est en régime plastique. L'état final vaut :

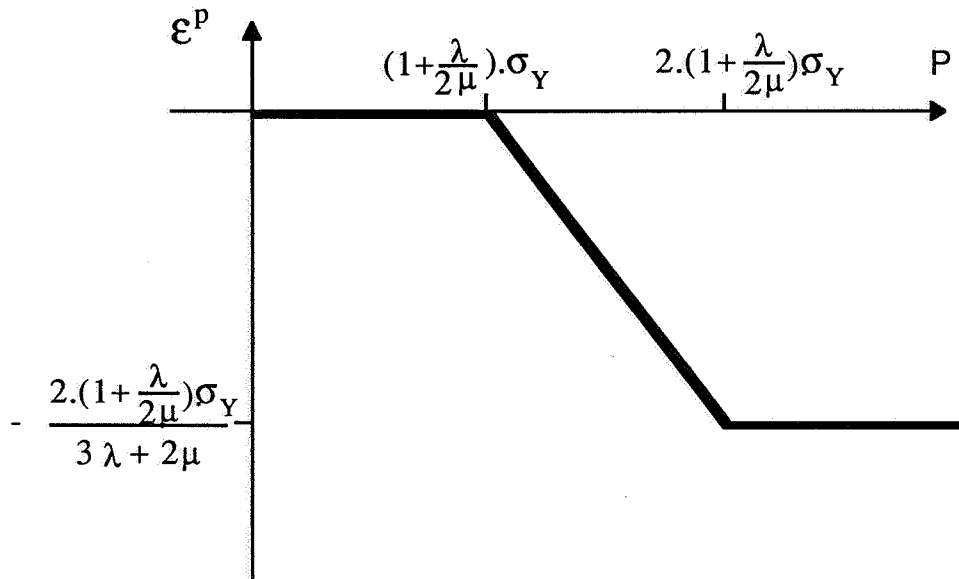
$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y$$

$$\varepsilon = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

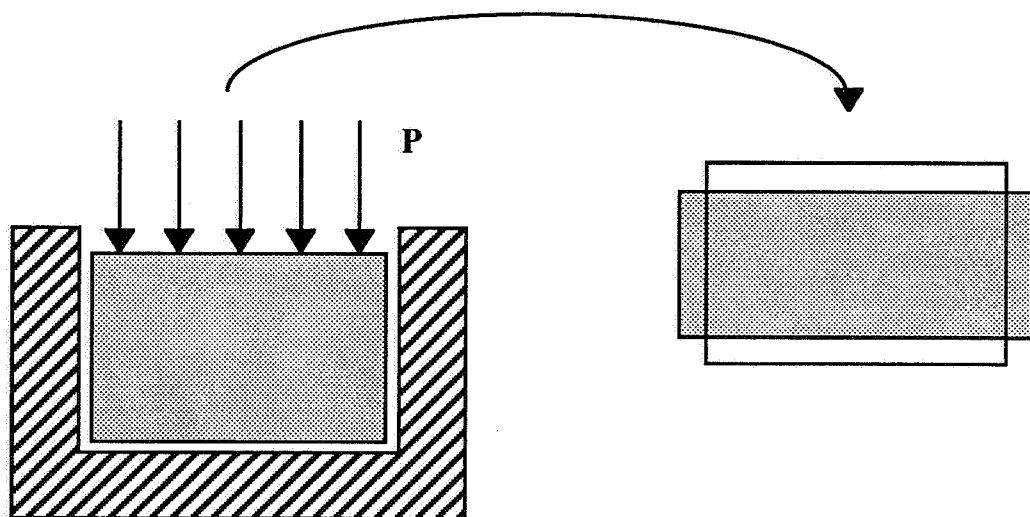
$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

On constate sur ce calcul que l'état résiduel ne dépend du chargement qu'à travers la valeur maximum de la pression en surface  $P$ . Représentons l'amplitude la déformation plastique longitudinale en fonction de  $P$  :



On constate qu'il y a trois domaines de pression. Lorsque la pression reste faible, le milieu reste élastique, toutes les déformations sont réversibles et la déformation plastique résiduelle est nulle. On a ensuite un régime où la déformation plastique croît linéairement avec l'amplitude de la pression appliquée. Enfin, aux hautes pressions, la déformation plastique sature à une valeur limite qu'il est impossible de dépasser en déformation uniaxiale.

Quelle interprétation physique peut-on avoir de cette grandeur  $\epsilon^P$  ? Supposons qu'après chargement, on sorte le cylindre comprimé de son moule. S'il y a eu déformation plastique, on récupérera un cylindre plus large mais moins haut :



$\varepsilon^p$  est égal à la variation relative  $\Delta h/h$  de hauteur du cylindre après extraction. On a donc montré entre autres qu'à partir du moment où le maximum de la pression appliquée dépasse un certain seuil, l'état final après extraction ne dépend plus du chargement, la pression appliquée pouvant être aussi élevée que l'on veut.

On peut également faire une remarque fondamentale : vue la géométrie du problème considéré, si la loi de variation  $\sigma_x(t)$  est connue, alors *les équations du comportement associées au critère plasticité suffisent à résoudre le problème*. Ajoutons que la loi de variation de  $\sigma_x(t)$  est donnée par la valeur de la divergence du tenseur des contraintes.

- En quasi-statique,  $\text{div } \underline{\sigma} = 0$ , et  $\sigma_x(x,t) = -p(t)$
- En dynamique, toute l'analyse développée au chapitre 2 avait pour but et a permis de connaître la loi de variation  $\sigma_x(x,t)$ . A une profondeur  $x$  donnée, on est donc capable de calculer  $\sigma_x(t)$ . En utilisant la loi de comportement de la même manière qu'en quasi-statique (dans le cas non visqueux), on est alors capable de calculer la déformation plastique  $\varepsilon^p$  à cette profondeur  $x$ . L'analyse développée au chapitre 2 permet pour un chargement et un milieu donnés de connaître la variation  $\sigma_{x,\max}(x)$  de l'amplitude l'onde

avec la profondeur et l'analyse quasi-statique qui vient d'être faite permet alors d'en déduire la variation  $\varepsilon^p(x)$  de la déformation plastique en fonction de la profondeur. Si l'état résiduel

$$\underline{\sigma} = \underline{L}:(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p)$$

associé est plastiquement admissible, alors ce champ de déformation plastique est effectivement le champ de déformation plastique final. Nous supposons dans ce chapitre cette hypothèse toujours réalisée et nous la vérifierons au chapitre suivant.

Cette analyse permet de donner en vrac les résultats suivants concernant un impact rapide d'amplitude  $P$ , de durée  $\tau$  sur une cible élasto-parfaitement plastique :

- Si  $P > 2(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y$  alors, il existe après impact une couche où la déformation plastique est homogène et la valeur de la déformation plastique longitudinale est :

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

L'épaisseur de cette couche est approximativement (cas d'une sollicitation 'créneau') :

$$l_{sat} = \frac{c_p c_e \tau}{c_e - c_p} E \left( \frac{P}{2\sigma_Y (1+\lambda/2\mu)} \right)$$

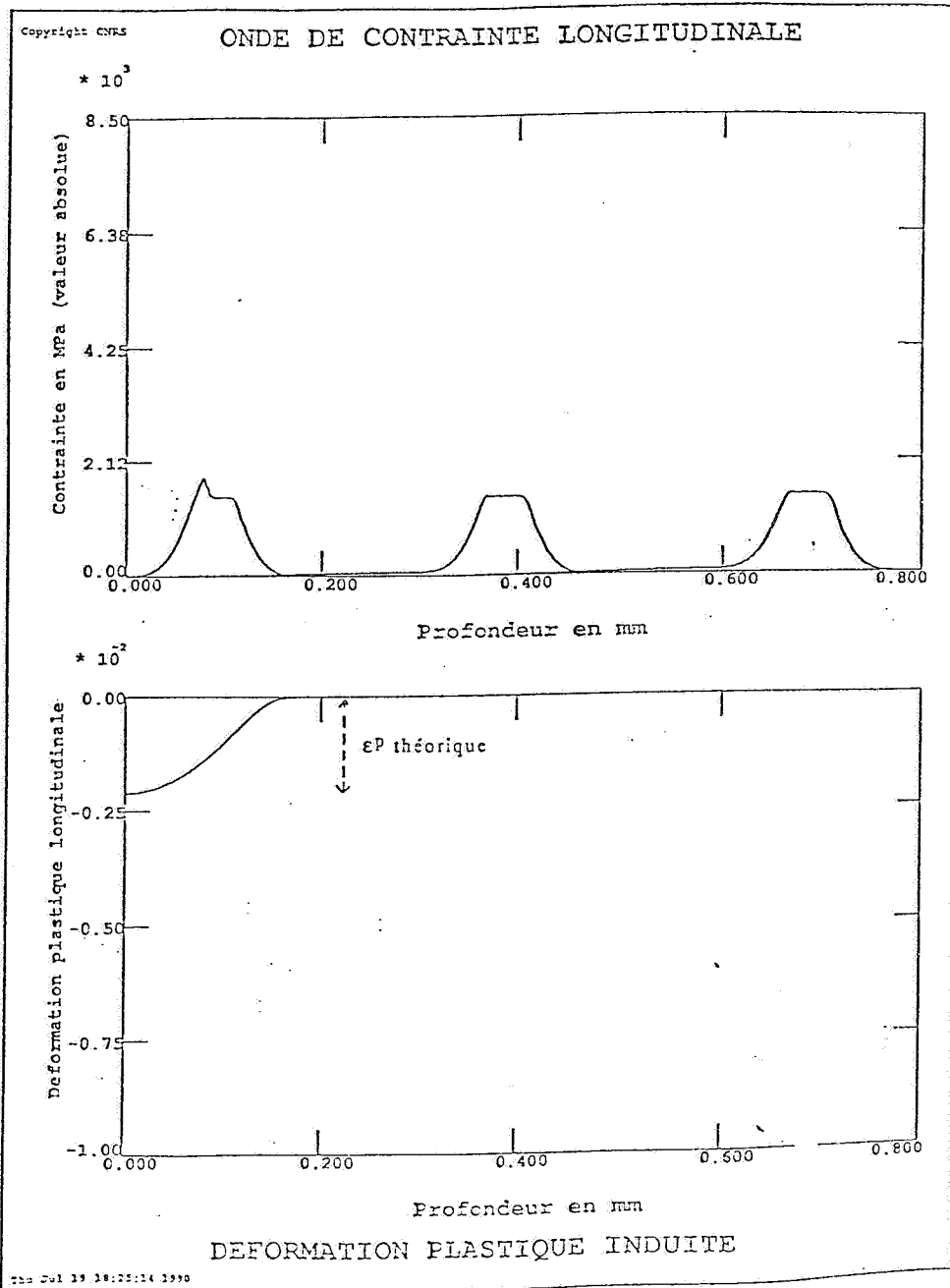
- Ensuite, il y a une zone où la déformation plastique décroît (en valeur absolue) jusqu'à 0. L'épaisseur de la zone affectée plastiquement peut également se calculer à l'aide des résultats du chapitre 2 et vaut approximativement (cas d'une sollicitation 'créneau')

$$l_{plast} = \frac{c_p c_e \tau}{c_e - c_p} E \left( \frac{P + \sigma_Y (1+\lambda/2\mu)}{2\sigma_Y (1+\lambda/2\mu)} \right)$$

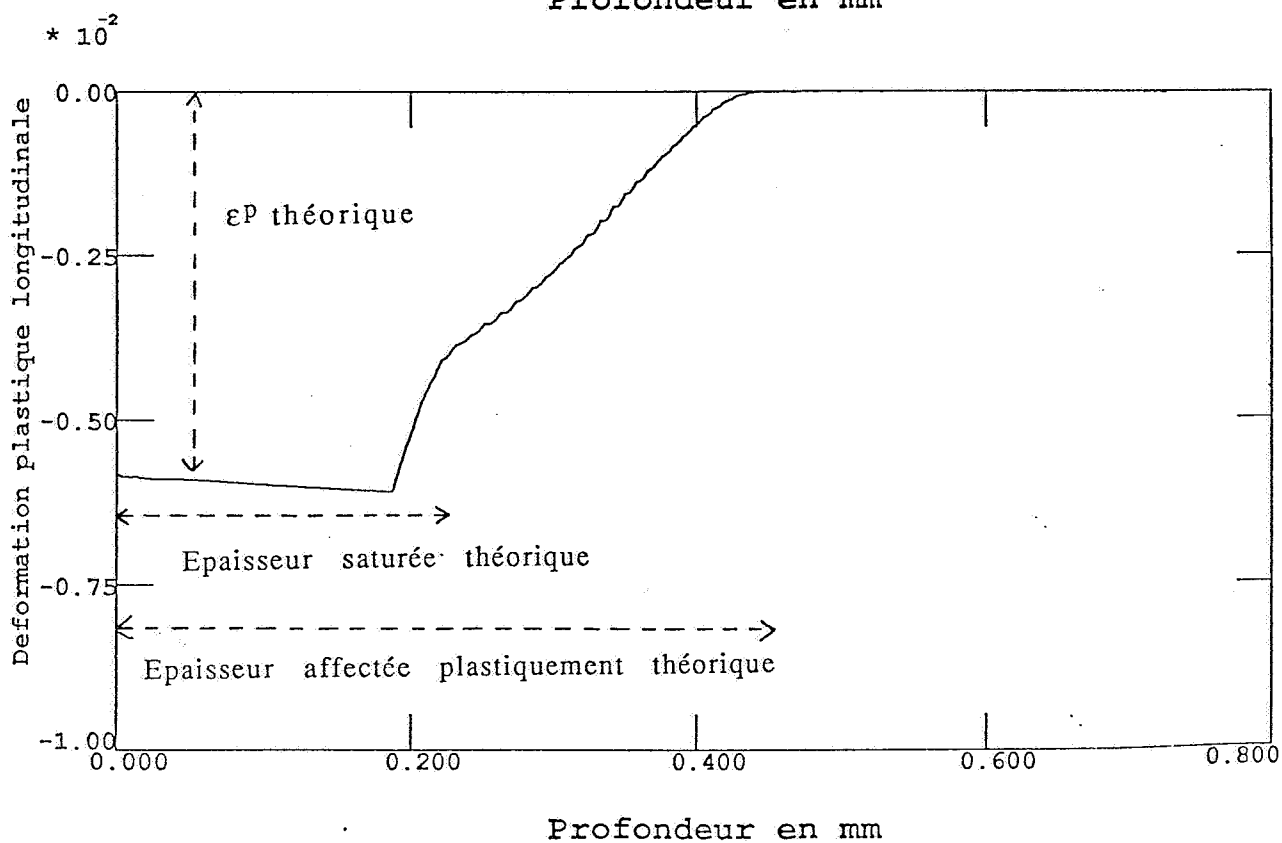
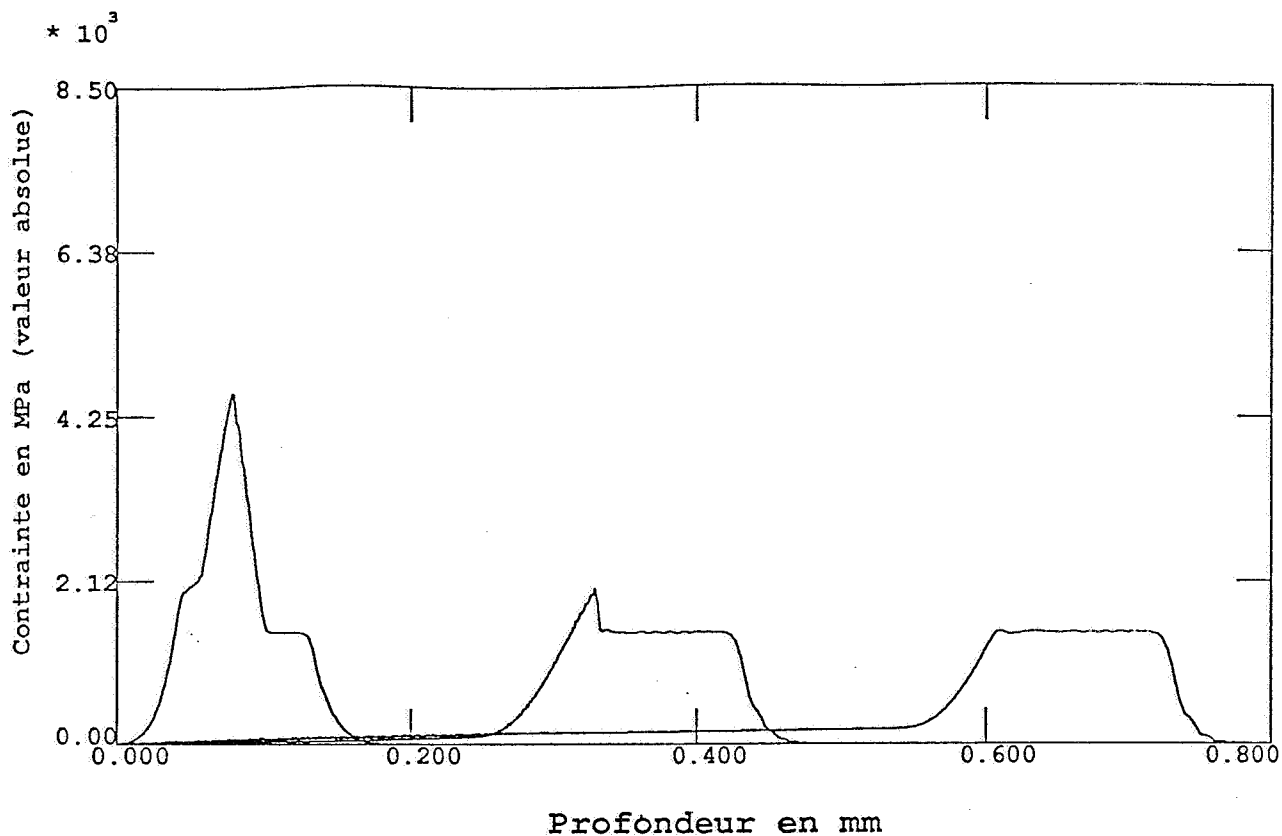
ou, plus précisément, mais la différence est négligeable :

$$l_{\text{plast}} = \frac{c_p c_e \tau}{c_e - c_p} E \left( \frac{P + \sigma_Y (1 + \lambda / 2\mu)}{4\sigma_Y (1 + \lambda / 2\mu) \frac{c_p}{c_e + c_p}} \right)$$

A titre d'illustration, on donne les résultats de calcul du champ de déformation plastique sur un acier de limite d'élasticité 870 MPa réalisé à l'aide du code numérique décrit en Annexe D. L'impulsion de pression est gaussienne, de largeur à mi-hauteur 10 ns. Le calcul a été réalisé avec des pressions successives de 20, 50 et 80 kBars.

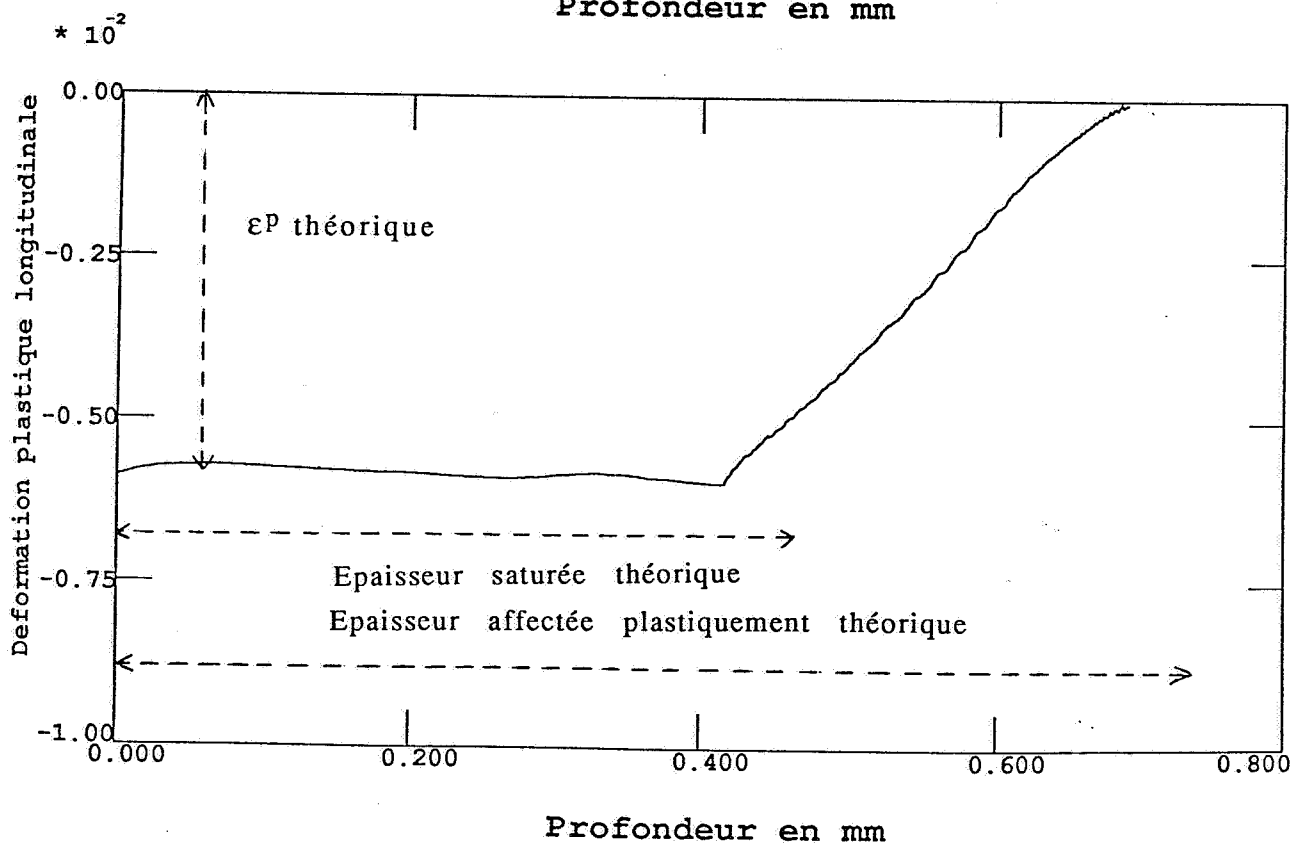
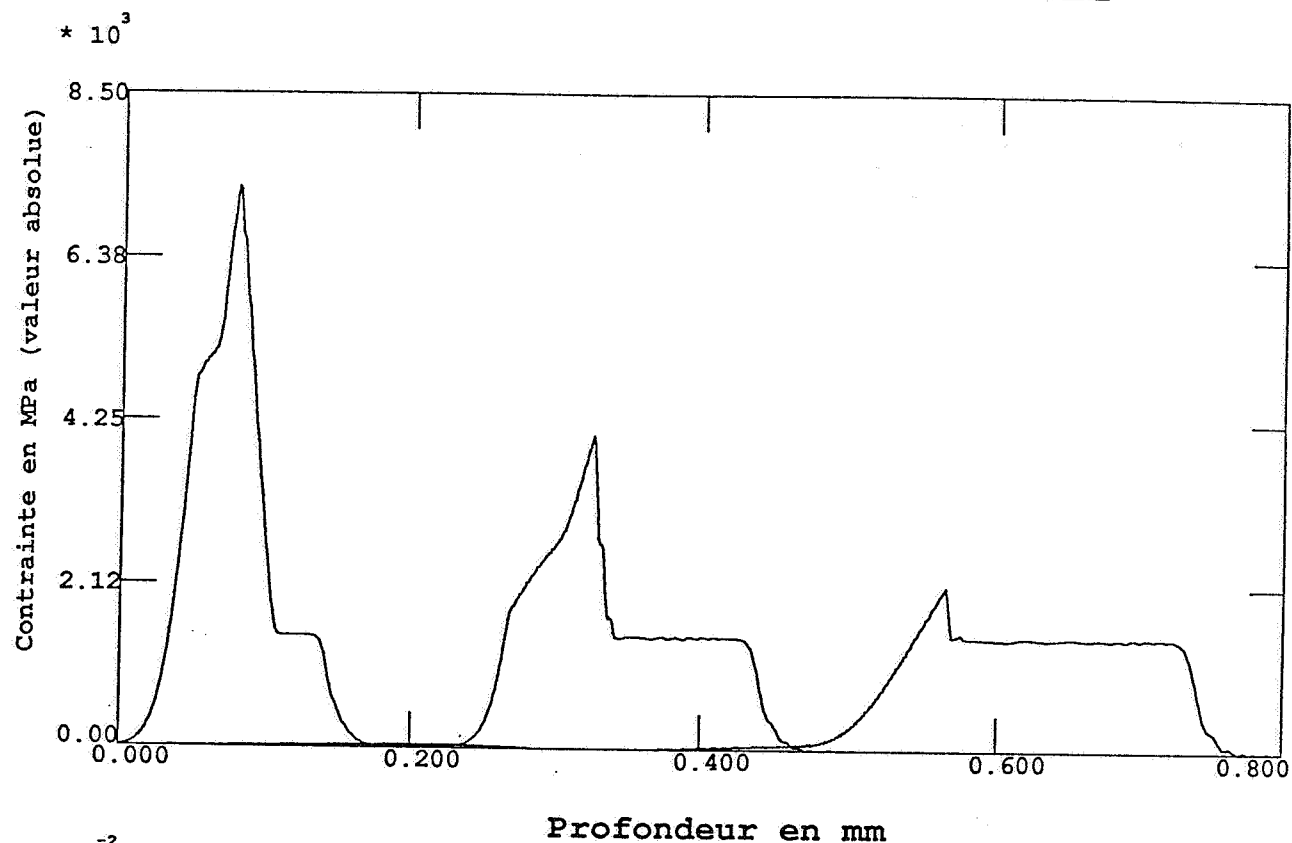


## ONDE DE CONTRAINTE LONGITUDINALE



## DEFORMATION PLASTIQUE INDUITE

## ONDE DE CONTRAINTE LONGITUDINALE



## DEFORMATION PLASTIQUE INDUITE



On a reporté sur chaque figure, les épaisseurs de zones affectées plastiquement et de zones saturées plastiquement calculées avec les formules approximatives données ci-dessus dans le cas de sollicitation 'créneau'.

### 1.1 Prise en compte de l'écrouissage cinématique linéaire

On a vu, au chapitre 2, que la plupart du temps (dès que  $C \ll \mu$ ) l'écrouissage cinématique linéaire a une influence négligeable sur la propagation de l'onde. Mais, il n'est pas du tout évident que la présence d'un écrouissage cinématique linéaire n'influence pas la valeur de la déformation plastique induite. Pour lever ce doute, il faut refaire le calcul de compression uniaxiale quasistatique dans le cas d'un matériau élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire. Les résultats du calcul sont les suivants :

#### Analyse de la charge

- $\sigma_x$  varie de 0 à  $-\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  : on est en régime élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y.(\lambda/2\mu)$$

$$\varepsilon = -\sigma_Y/2\mu$$

$$\varepsilon^p = 0$$

- $\sigma_x$  varie de  $-\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  à  $-P$  : on est en régime plastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -P$$

$$\sigma_r = -\frac{\lambda.\sigma_Y}{2\mu} - \frac{\lambda + 2\mu/3 + \lambda C/2\mu}{\lambda + 2\mu/3 + C.(1+\lambda/2\mu)} .(P - (1+\frac{\lambda}{2\mu})\sigma_Y)$$

$$\varepsilon = -\frac{\sigma_Y}{2\mu} - \frac{1 + C/2\mu}{\lambda + 2\mu/3 + C.(1+\lambda/2\mu)} .(P - (1+\frac{\lambda}{2\mu})\sigma_Y)$$

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \frac{P - (1+\lambda/2\mu)\sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3 + C.(1+\lambda/2\mu)}$$

## Analyse de la décharge

Deux cas se présentent :

1)  $\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu) < P < 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$

-  $\sigma_x$  varie de  $-P$  à  $0$  : la décharge est entièrement élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_r = - \frac{\sigma_Y}{1 + C \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu)}{\lambda + 2\mu/3}} \cdot \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right)$$

$$\varepsilon = - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3 + C \cdot (1+\lambda/2\mu)} \cdot \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right)$$

$$\varepsilon^p = - \frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3 + C \cdot (1+\lambda/2\mu)} \cdot \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right)$$

2)  $P > 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$

-  $\sigma_x$  varie de  $-P$  à  $-P+2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  : on est en régime élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -P + 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

$$\sigma_r = \frac{\lambda \cdot \sigma_Y}{2\mu} - \frac{\lambda + 2\mu/3 + \lambda C/2\mu}{\lambda + 2\mu/3 + C \cdot (1+\lambda/2\mu)} \cdot (P - (1 + \frac{\lambda}{2\mu}) \sigma_Y)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_Y}{2\mu} - \frac{1 + C/2\mu}{\lambda + 2\mu/3 + C \cdot (1+\lambda/2\mu)} \cdot (P - (1 + \frac{\lambda}{2\mu}) \sigma_Y)$$

$$\varepsilon^p = - \frac{2}{3} \cdot \frac{P - (1+\lambda/2\mu) \sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3 + C \cdot (1+\lambda/2\mu)}$$

-  $\sigma_x$  varie  $-P+2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  à  $0$  : on est en régime plastique. L'état final vaut :

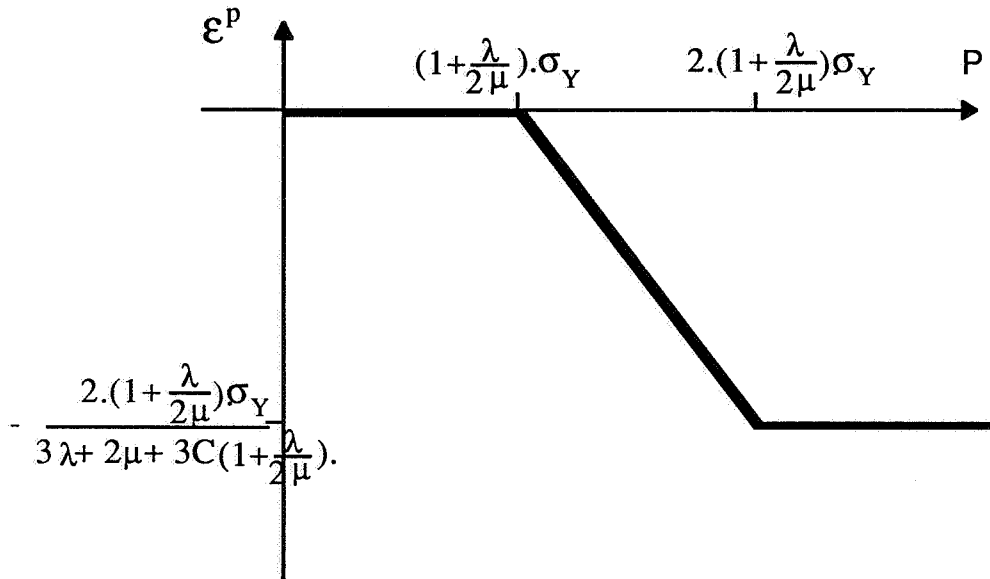
$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_r = - \frac{\sigma_Y}{1 + C \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu)}{\lambda + 2\mu/3}}$$

$$\varepsilon = - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3 + C \cdot (1+\lambda/2\mu)}$$

$$\varepsilon^p = - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_Y \cdot (1+\lambda/2\mu)}{\lambda + 2\mu/3 + C \cdot (1+\lambda/2\mu)}$$

Représentons comme précédemment la déformation plastique longitudinale obtenue en fonction de l'amplitude  $P$  de la pression appliquée.



Le seul changement apparaît sur la valeur de la déformation plastique de saturation qui vaut :

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \frac{\lambda}{2\mu})\sigma_Y}{\lambda + \frac{2\mu}{3}} \cdot \frac{1}{1 + C \cdot \frac{1 + \frac{\lambda}{2\mu}}{\lambda + \frac{2\mu}{3}}}$$

au lieu de :

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \frac{\lambda}{2\mu})\sigma_Y}{\lambda + \frac{2\mu}{3}}$$

On en déduit que dès que la condition :

$$C \ll \frac{\lambda + \frac{2\mu}{3}}{1 + \frac{\lambda}{2\mu}}$$

est vérifié, alors l'influence de l'écrouissage cinématique linéaire sur la déformation plastique est largement négligeable. Cette condition est largement réalisée sur nos

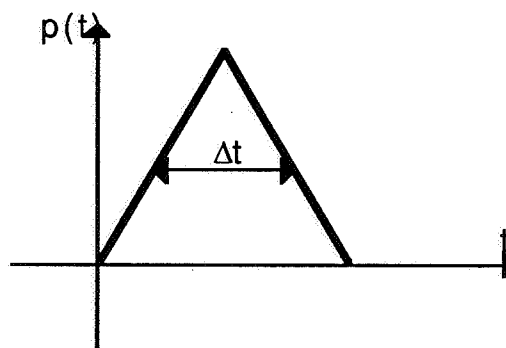
aciers 35CD4 30 HRC et 50 HRC. A l'avenir, l'écrouissage cinématique linéaire sera toujours négligé. Ajoutons pour conclure que l'influence qualitative de la présence d'un écrouissage linéaire dans le cas d'un impact rapide est d'augmenter la profondeur affectée plastiquement et de diminuer la valeur absolue de la déformation plastique induite. Ces deux effets sont cependant négligeables si  $C \ll E$ , ce qui est réalisé dans le cas de la plupart des aciers.

## 1.2. Prise en compte de la visco-plasticité

Là encore, on peut faire la même remarque que pour l'écrouissage cinématique linéaire. On a montré au chapitre 2, qu'en ce qui concerne la propagation de l'onde, dès que :

$$\Delta t \gg \frac{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)}{\lambda + \frac{2\mu}{3}}$$

on peut négliger les effets visqueux. Mais, il reste à montrer que ces effets visqueux sont également négligeables sur la valeur de la déformation plastique induite. On va donc calculer l'effet de l'application d'un pulse de pression 'triangulaire' :



sur un massif élasto-viscoplastique assujetti à une déformation uniaxiale.

La charge élastique est similaire aux cas précédents et à la fin de la charge élastique, on a de même que précédemment :

-  $\sigma_x$  varie de 0 à  $-\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  : on est en régime élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y.(\lambda/2\mu)$$

$$\varepsilon = -\sigma_Y/2\mu$$

$$\varepsilon^p = 0$$

Les équations décrivant la charge viscoplastique s'écrivent :

$$\sigma_r = \lambda.\varepsilon + \mu.\varepsilon^p$$

$$\sigma_x = (\lambda+2\mu).\varepsilon - 2\mu.\varepsilon^p$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{2}{3\eta}(\sigma_x - \sigma_x)$$

On obtient donc une équation différentielle régissant l'évolution de la déformation plastique :

$$\frac{\eta\left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right)}{\lambda+2\mu/3}\dot{\varepsilon}^p + \varepsilon^p = \frac{2\sigma_x}{3\lambda+2\mu}$$

Il est aisé d'intégrer cette équation, et l'on trouve à la fin de la charge :

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3}\frac{P - (1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} - \frac{2}{3}\frac{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}\left(1 - e^{-\theta\left(1 - \frac{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{P}\right)}\right)$$

où :

$$\theta = \frac{\Delta t.(\lambda+2\mu/3)}{\eta.(1+\lambda/2\mu)}$$

si  $\theta$  est petit devant 1, on peut faire un développement limité en  $\theta$  à l'ordre 1 :

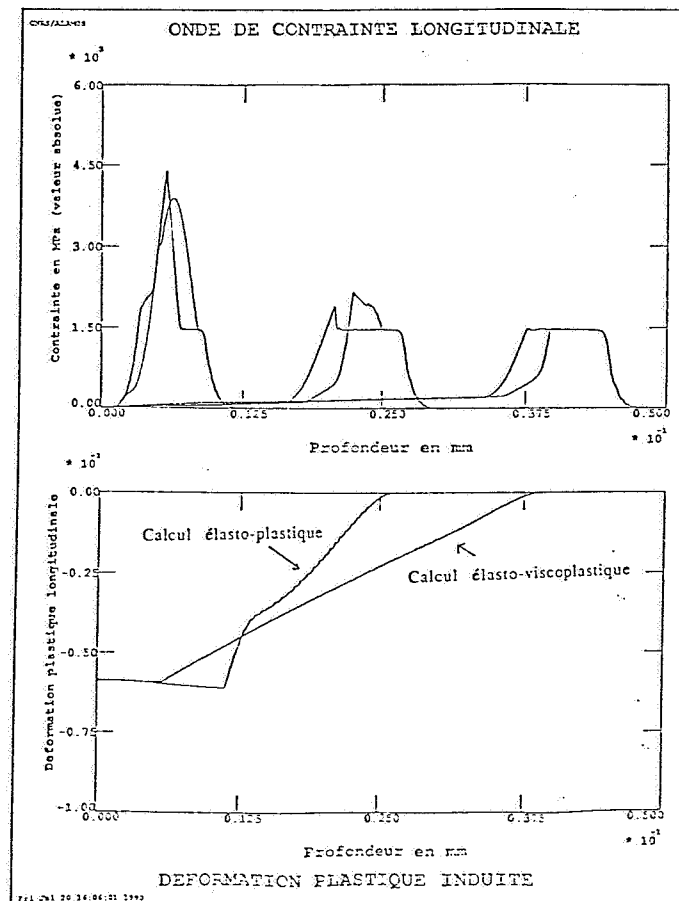
$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3}\frac{P}{\lambda+2\mu/3} + \frac{2}{3}\frac{(1+\lambda/2\mu).\sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}(1 - \theta)$$

Donc, si  $\theta$  est petit devant 1, on retrouve la solution de l'élastoplasticité en fin de charge. Nous supposons qu'il en serait de même en fin de décharge. La condition pour pouvoir négliger les effets visqueux dans le calcul de la déformation plastique est donc :

$$\Delta t \gg \frac{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)}{\lambda + \frac{2\mu}{3}}$$

On a vu au chapitre 2, que dans le cas des aciers, cette valeur minimum de la largeur à mi-hauteur de l'impulsion est de 1 ns.

A titre d'illustration et pour montrer qualitativement l'influence des effets visqueux, on représente ci-après des calculs de déformation plastique induite dans un acier de limite d'élasticité 870 MPa par une impulsion gaussienne de largeur à mi-hauteur 0,6 ns et d'amplitude 50 kBars. On a, là encore, superposé les résultats élasto-plastiques et élasto-viscoplastiques. On remarque que les effets visqueux ont tendance à 'étaler' la déformation plastique dans la profondeur.

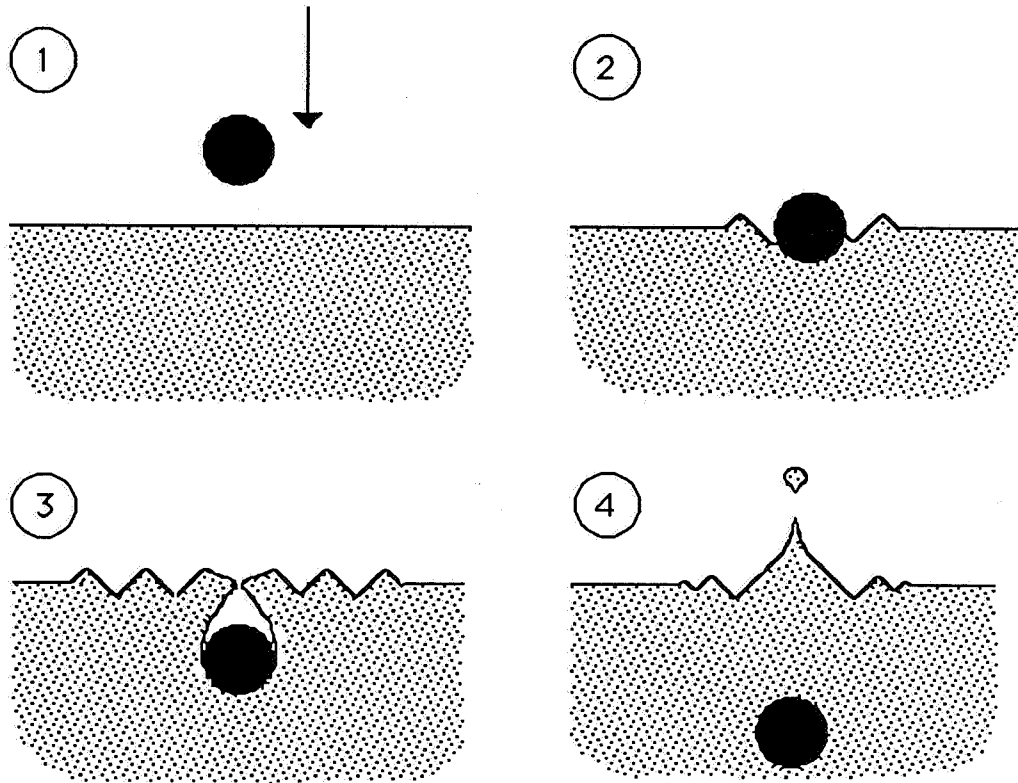


On peut donc dire, pour conclure, que l'écrouissage et les effets visqueux ont tous deux tendance à 'étaier' la déformation plastique tout en en réduisant l'amplitude. Cependant, dans le cas des impacts rapides non visqueux d'amplitude limitée, si l'écrouissage n'intervient pas (cas de la quasi-totalité des aciers et alliages d'aluminium), on a donné une évaluation analytique simple du champ de déformation plastique juste après le passage de l'onde. Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera avoir affaire à un impact de ce type.

## **2. Effet des détentees latérales**

Ce développement repose sur une idée originale de P.Forget [1]. L'idée est la suivante : lorsque l'onde se propage dans le cylindre à l'aplomb de la surface impactée, il y a une perturbation induite sur les bords du cylindre à la frontière avec la zone affectée par l'onde. Des ondes radiales sont alors induites vers l'extérieur mais aussi vers l'intérieur de la zone déformée plastiquement. Ces ondes sont susceptibles de modifier le champ de déformation plastique calculé plus haut.

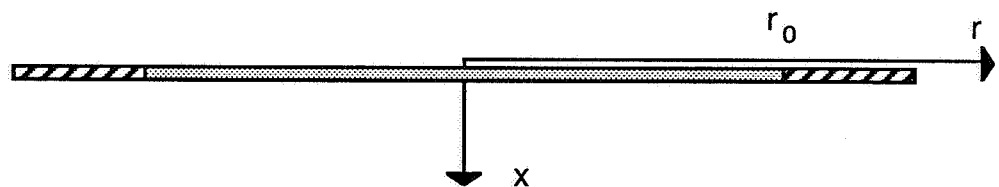
On peut illustrer cette réflexion par le phénomène suivant : jetons un boulet de canon dans une mare. Lorsque le boulet s'enfonce dans l'eau, il crée une perturbation autour de lui qui va engendrer un faisceau d'ondes concentriques qui va se propager en s'amortissant à la surface de l'eau en partant du point où est tombé le boulet. Mais, il ne faut pas oublier qu'après le passage du boulet, l'eau va se refermer à l'aide d'une onde concentrique qui va se focaliser au centre. Au centre, on a alors une singularité qui peut se traduire par l'émission verticale d'une goutte d'eau.



Nous allons voir que dans le cas de l'impact rapide sur un métal, il existe un phénomène analogue.

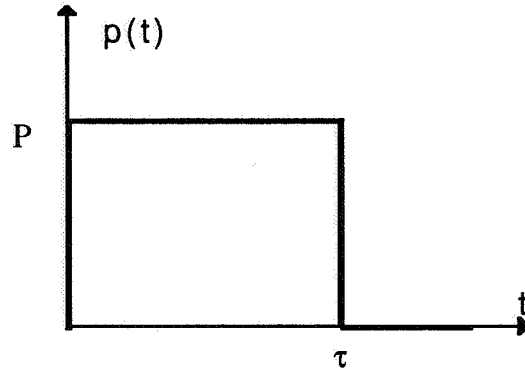
### 2.1. Cas de l'impact circulaire

Considérons une tranche d'épaisseur  $dx$  infiniment fine à la surface de la cible.



La contrainte longitudinale dans cette tranche est imposée par la pression appliquée (ou par le passage de l'onde) que l'on peut supposer encore être de la forme :

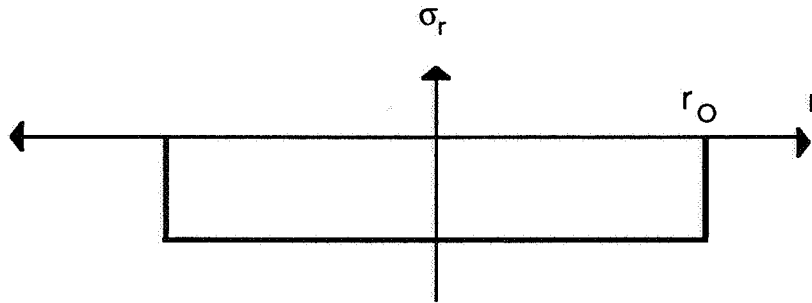




On suppose également cette pression appliquée sur un disque de la surface. A l'instant 0, la contrainte longitudinale passe instantanément de la valeur 0 à la valeur  $-P$ . Dans cet intervalle de temps infiniment court, il ne peut y avoir aucun déplacement matériel radial. Il apparaît donc une contrainte radiale :

$$\sigma_r = \frac{-\lambda P}{\lambda + 2\mu}$$

dans toute la zone sollicitée. Il y a alors discontinuité de  $\sigma_r$  de part et d'autre de la surface  $r = r_0$ .



Il va donc y avoir émission d'au moins une onde que nous allons supposer radiale. On notera  $u$  ce déplacement radial qui fait par ailleurs que la déformation n'est pas uniaxiale. Les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{v}{r} &= 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{v}{r} &= 0 \end{aligned}$$

Là encore, il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaire du premier ordre hyperbolique (v. Annexe B). Les directions caractéristiques ont pour équations :

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+2\mu)}}$$

Malheureusement, même en élasticité et dans le cas de sollicitation 'créneau', du fait de la complexité des équations axisymétriques, on ne peut exhiber de solution analytique par la méthode des caractéristiques. On va voir cependant que dans le cas de l'hypothèse décrite au chapitre précédent :

$$\tau \ll r_0 \sqrt{\frac{\rho(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)}}$$

on peut avoir une solution approchée des premiers instants de propagation de la perturbation.

En effet, le long d'une ligne caractéristique d'équation :

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+2\mu)}}$$

On a (v. Annexe B sur les systèmes hyperboliques) :

$$-\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}dv \pm c.d\sigma_r + \left( \pm c \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \frac{v}{r} \right) dr = 0$$

Or, supposons, que cette ligne caractéristique corresponde à la propagation d'une discontinuité dans une zone où, devant le front de l'onde, le déplacement radial soit nul. Alors, par continuité du déplacement,  $u$  est nul sur le front de l'onde. On en déduit :

$$\sigma_\theta = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_r - P)$$

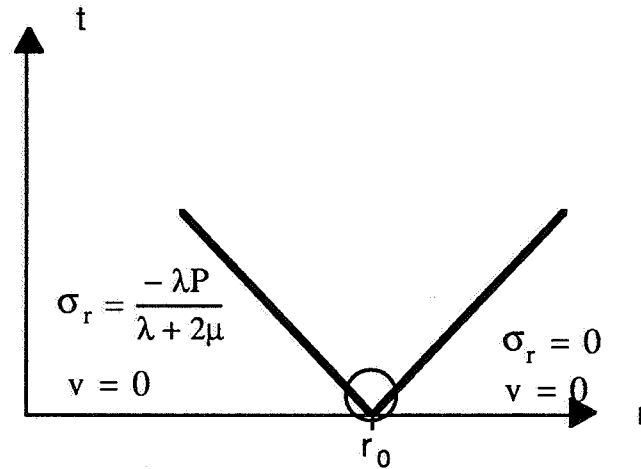
De plus, on a toujours au franchissement de la discontinuité, la condition de continuité dynamique :

$$[\sigma_r] = -\rho c[v]$$

d'où, sur le front de discontinuité :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r}{2r} + \frac{\lambda P}{4(\lambda + \mu)r} \quad (*)$$

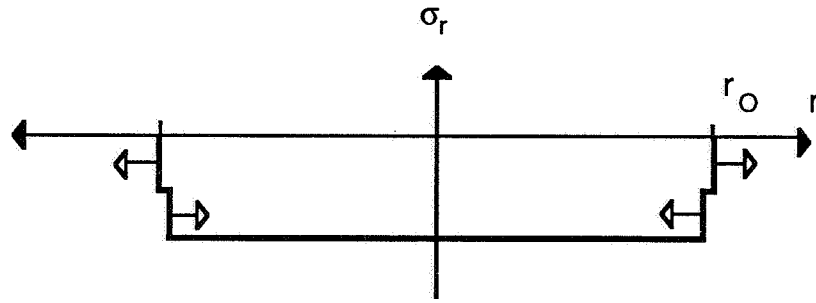
Ce résultat étant acquis, revenons à notre problème. A l'instant  $t=0$ , il existe, de part et d'autre de la surface d'équation  $r=r_0$ , une discontinuité de la contrainte radiale. Cette discontinuité n'étant pas statiquement admissible, deux ondes partent à priori de cette surface :



A l'instant  $t=0+dt$  (zone entourée par le cercle), on peut supposer que  $\sigma_r$  et  $v$  entre les deux lignes caractéristiques sont constants (approximation). La contrainte dans la zone entourée par le cercle vaut donc à peu près :

$$\sigma_r = \frac{-\lambda P}{2(\lambda + 2\mu)}$$

A l'instant  $t = 0+dt$ , la contrainte radiale a la répartition spatiale suivante :



On peut ensuite appliquer l'équation (\*) d'évolution de l'amplitude d'une discontinuité qui se propage à chacun des deux fronts :

Sur le front extérieur : 
$$\sigma_r = \frac{-\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} \sqrt{\frac{r_0}{r}}$$

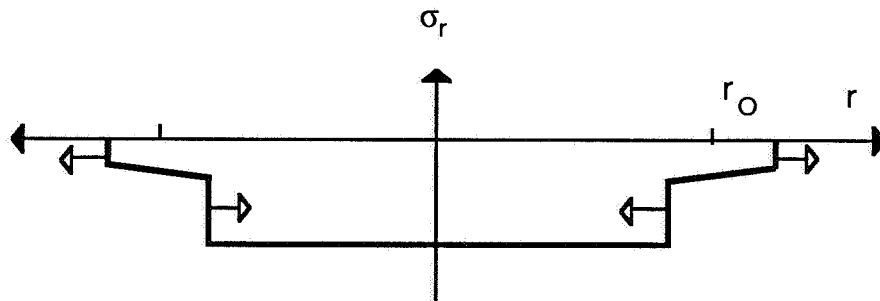
Sur le front intérieur : 
$$\sigma_r = \frac{-\lambda P}{(\lambda+2\mu)} + \frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} \left( \sqrt{\frac{r_0}{r}} + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \text{LOG}\left(\frac{r}{r_0}\right) \right)$$

Ce qui donne, juste avant l'instant  $\tau$  (fin d'application de la pression), en supposant toujours ( $\tau \ll r_0/c$ ) et en faisant un développement limité en  $c\tau/r_0$  :

Sur le front extérieur : 
$$\sigma_r = -\frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} \left( 1 - 2 \frac{c\tau}{r_0} \right)$$

Sur le front intérieur : 
$$\sigma_r = -\frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{c\tau}{r_0} \right)$$

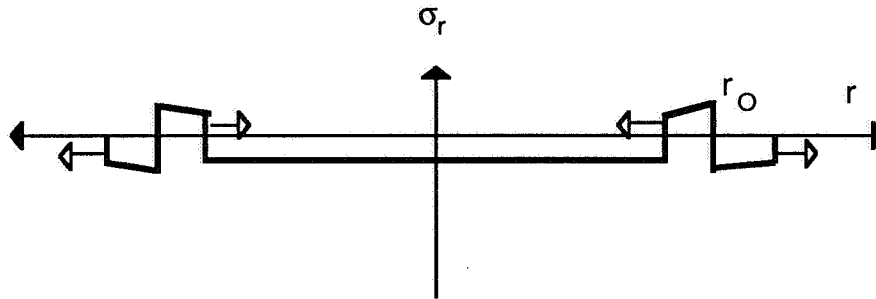
En interpolant la contrainte radiale entre les deux fronts par une droite, on obtient comme répartition spatiale de la contrainte radiale juste avant l'instant  $\tau$  :



A l'instant  $\tau$ , la pression  $P$  imposée disparaît. Il reste (v. calcul au début de ce chapitre) une déformation plastique  $\epsilon^p$ . On suppose que la contrainte  $\sigma_x$  reste nulle. Dans tout le cylindre d'équation  $r < r_0$ , on a alors :

$$\sigma_r = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{u}{r} + \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \epsilon^p$$

La répartition spatiale de la contrainte radiale est alors :



La perturbation due au passage de l'onde 'principale' a donc induit un système de deux ondes, une se propageant vers l'extérieur et l'autre vers l'intérieur. L'équation d'évolution de l'amplitude des deux ondes s'écrit (cf ci-dessus) :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = - \frac{\sigma_r}{2r}$$

L'amplitude de l'onde extérieure s'écrit (en gardant que le terme d'ordre 0 en  $c\tau/r_0$ ) :

$$\sigma_r = \frac{-\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} \cdot \sqrt{\frac{r_0}{r}}$$

Elle se propage donc en s'amortissant. Elle est élastique à la condition :

$$P < \frac{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda\sqrt{3\lambda^2+6\lambda\mu+4\mu^2}} \cdot \sigma_Y$$

ce qui est vérifié dans le cas des aciers pour les impacts d'amplitude limitée (pour un acier, cette condition s'écrit :  $P < 5,5\sigma_Y$ ). On suppose maintenant cette condition vérifiée.

L'amplitude de l'onde intérieure s'écrit :

$$\sigma_r = \frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} \sqrt{\frac{r_0}{r}}$$

Elle se propage donc en s'amplifiant. On va maintenant calculer à partir de quelle valeur de  $r$ , elle plastifie. On va pour cela, supposer la condition de saturation en déformation plastique par l'onde 'principale' vérifiée :

$$P > 2\sigma_Y \cdot (1 + \lambda/2\mu)$$

Alors, sur le front de l'onde, on a :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \sigma_Y \\ \sigma_\theta &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \sigma_Y \\ \sigma_x &= 0\end{aligned}$$

En éliminant la dérivée du déplacement de ces équations, on a :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} \sqrt{\frac{r_0}{r}} - \sigma_Y \\ \sigma_\theta &= \frac{\lambda^2 P}{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)} \sqrt{\frac{r_0}{r}} - \sigma_Y \\ \sigma_x &= 0\end{aligned}$$

Cette onde va plastifier pour :

$$r = r_0 \cdot \frac{P^2}{\sigma_Y^2} \left[ \frac{\lambda(3\lambda^2 + 6\lambda\mu + 4\mu^2)}{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \right]^2$$

N.B. Cette formule n'est applicable que si la condition :

$$P < \frac{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda\sqrt{3\lambda^2 + 6\lambda\mu + 4\mu^2}} \cdot \sigma_Y$$

est vérifié. Si elle ne l'est pas (cas des alliages d'aluminium), alors, on a replastification après le passage de l'onde principale sur un disque de diamètre supérieur au diamètre de l'impact. On ne peut alors rien dire du champ de déformation plastique induit.

Application numérique : dans le cas d'un acier de limite d'élasticité 870 MPa subissant un impact de rayon 4 mm, d'amplitude  $2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$  le rayon de la zone perturbée vaut :

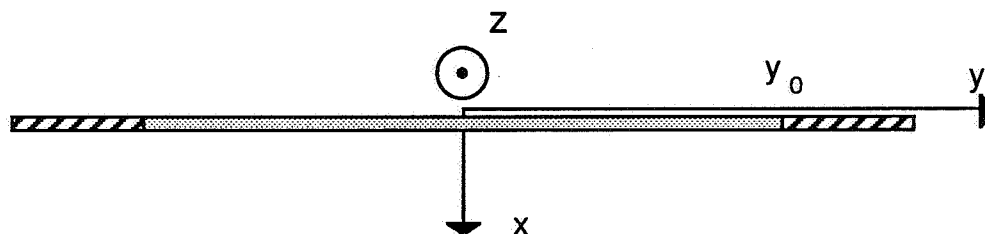
$$r = 0,6 \text{ mm.}$$

On verra dans un prochain chapitre que cette perturbation au centre est catastrophique. Or, elle est essentiellement due à la forme de l'impact qui induit une singularité au centre. On va donc voir ce qu'il en est dans le cas d'autre formes d'impact.

Il faut souligner ici que l'on a pris le parti de ne regarder que l'influence d'ondes radiales longitudinales. Or, il est vraisemblable qu'il existe également des ondes radiales transverses. Néanmoins, on peut penser que l'ordre de grandeur de la taille de la zone perturbée par les ondes transverses est le même que celui de la taille de la zone perturbée par les ondes longitudinales.

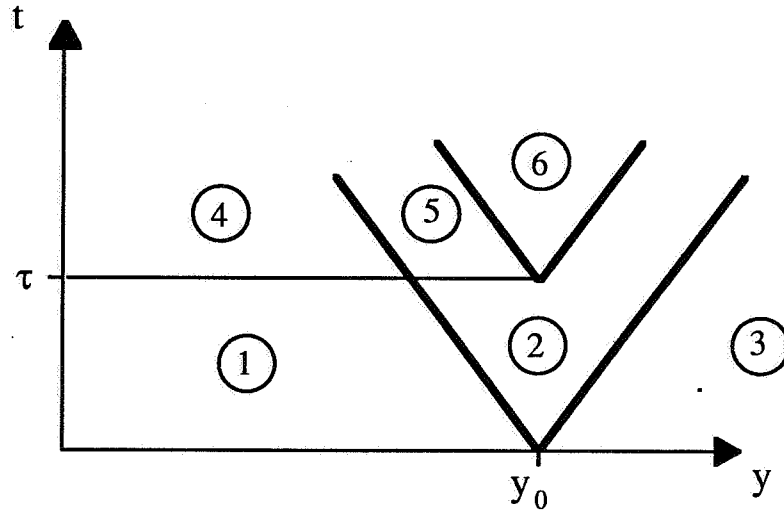
## 2.2. Cas de l'impact infiniment étendu dans une direction (bande)

Les calculs dans le cas de l'impact circulaire s'étant révélés extrêmement complexes, on va dans un premier temps simplifier le problème en considérant un impact rectangulaire infiniment long :



On suppose que l'on applique l'impact sur une bande infiniment longue dans le sens  $z$  et de largeur  $2y_0$ . On peut alors faire les hypothèses suivantes : déformation nulle dans le sens  $z$  (hypothèse de déformation plane) et contrainte imposée par l'onde 'principale' dans le sens  $x$ . Cette dernière hypothèse

se justifie par le fait que l'onde principale se propage sur une distance faible devant  $y_0$ . Contrairement au cas axisymétrique, on peut ici proposer une solution exacte. Le calcul par la méthode des caractéristiques donne :



avec :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y,1} &= \frac{-\lambda P}{\lambda+2\mu} & v_1 &= 0 \\
 \sigma_{y,2} &= \frac{-\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} & v_2 &= \frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)\rho c} \\
 \sigma_{y,3} &= 0 & v_3 &= 0 \\
 \sigma_{y,4} &= -\sigma_Y & v_4 &= 0 \\
 \sigma_{y,5} &= \frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} - \sigma_Y & v_5 &= \frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)\rho c} \\
 \sigma_{y,6} &= -\frac{\sigma_Y}{2} & v_6 &= \frac{\sigma_Y}{2\rho c}
 \end{aligned}$$

où :

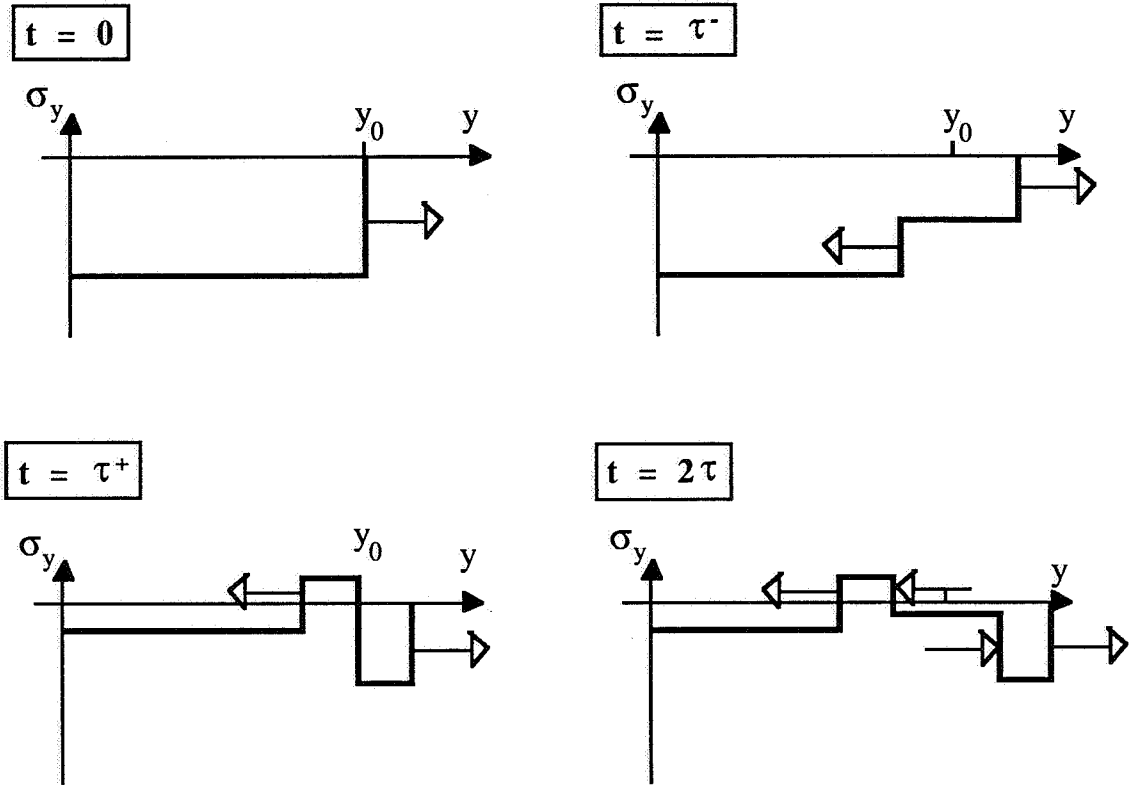
$$c = \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+\mu)}}$$

et, ce en supposant vérifiée la condition de saturation en déformation plastique par l'onde 'principale' :

$$P > 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$



De manière plus parlante, on obtient la répartition de contrainte suivante :



Dans l'onde qui part vers l'intérieur, on a donc :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \epsilon_y - \sigma_Y \\ \sigma_z &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \epsilon_y - \sigma_Y\end{aligned}$$

avec, d'autre part :

$$\sigma_y = \frac{\lambda P}{2(\lambda+2\mu)} - \sigma_Y$$

Si l'on veut que le champ de déformation plastique induit par l'onde principale ne soit pas perturbé, il faut que la contrainte obtenue au centre par superposition des deux ondes issues de chacun des bords de l'impact, i. e. :

$$P < \frac{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)}{\lambda(3\lambda^2+6\lambda\mu+4\mu^2)} \cdot \sigma_Y$$

A la différence du calcul précédent (impact circulaire), ce calcul, moyennant les hypothèses faites est exact.

Application numérique : dans le cas de l'acier et d'un impact infiniment long, on a saturation en déformation plastique à la surface par l'onde 'principale' sans perturbation de ce champ par les ondes 'secondaires' si :

$$2\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \cdot \sigma_Y < P < \frac{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)}{\lambda(3\lambda^2+6\lambda\mu+4\mu^2)} \cdot \sigma_Y$$

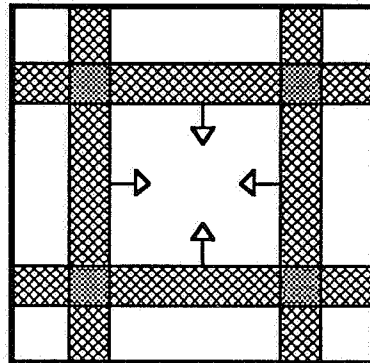
soit :

$$3,4 \sigma_Y < P < 4 \sigma_Y$$

Dans la pratique, l'impact infiniment long n'étant pas très réalisable, nous allons nous intéresser à l'impact carré.

### 2.3. Cas de l'impact carré

De la même manière que précédemment, il va y avoir émission de quatre ondes planes partant des quatre cotés de l'impact et se propageant vers l'intérieur. Nous supposons ici que le coté de l'impact est grand devant la distance sur laquelle se propage l'onde principale (avant de devenir élastique). Les hypothèses données dans le paragraphe précédent (déformation plane et contrainte selon x nulle) sont alors toujours applicables.



Pour ne pas modifier le champ de déformation plastique, il faut, que lorsque les quatre ondes se superposent au centre, la contrainte résultante soit plastiquement admissible. Pour des raisons de symétrie, la contrainte au centre lors de la superposition s'écrit :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 \\ \sigma_{y1} &= -\sigma_Y + 2\Delta\sigma_n + 2\Delta\sigma_t \\ \sigma_{y2} &= -\sigma_Y + 2\Delta\sigma_n + 2\Delta\sigma_t\end{aligned}$$

où,  $\Delta\sigma_n$  et  $\Delta\sigma_t$  sont respectivement les amplitudes de  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  de chacune des deux ondes précédentes.

Dans le cas où la pression  $P$  est supérieure au seuil de saturation en déformation plastique par l'onde 'principale', la condition pour ne pas perturber ce champ de déformation plastique s'énonce :

$$2\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \cdot \sigma_Y < P < \frac{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda(3\lambda+2\mu)} \cdot \sigma_Y$$

Application numérique : dans le cas d'un acier, cette condition s'énonce :

$$3,4 \sigma_Y < P < 3,8 \sigma_Y$$

soit :

$$\begin{aligned}35\text{CD}4 \text{ 30 HRC} &: 29 \text{ kBars} < P < 33 \text{ kBars} \\ 35\text{CD}4 \text{ 50 HRC} &: 42 \text{ kBars} < P < 48 \text{ kBars}\end{aligned}$$

Dans le cas d'un aluminium, il vient :

$$2 \sigma_Y < P < 3,1 \sigma_Y$$

### 3. Superposition de plusieurs impacts

On se place ici dans le cas où l'on utilise des impacts carrés dans des conditions telles que le champ de déformation plastique induit par l'onde principale n'est pas modifié. On

verra dans le chapitre suivant que, longtemps après un impact, s'établit un état d'équilibre tel que :

$$\underline{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon}_0^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_0^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon_0^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0^p \end{pmatrix}$$

avec :

$$\sigma_0 < 0 \quad ; \quad \varepsilon_0^p < 0 \quad ; \quad |\sigma_0| < \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)} |\varepsilon_0^p|$$

On va donc refaire une analyse quasi-statique dans l'esprit de celle développée au début de ce chapitre mais avec les conditions initiales décrites ci-dessus :

#### Analyse de la charge

-  $\sigma_x$  varie de 0 à  $(\sigma_0 - \sigma_Y) \cdot (1 + \lambda/2\mu)$  : on est en régime élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = (\sigma_0 - \sigma_Y) \cdot (1 + \lambda/2\mu)$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y \cdot (\lambda/2\mu) + \sigma_0 \cdot (1 + \lambda/2\mu)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\sigma_0 - \sigma_Y)/2\mu$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_0^p$$

-  $\sigma_x$  varie de  $-\sigma_Y \cdot (1 + \lambda/2\mu)$  à  $-P$  : on est en régime plastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -P$$

$$\sigma_r = -P + \sigma_Y$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0 - \sigma_Y}{2\mu} - \frac{P + (1 + \lambda/2\mu) \cdot (\sigma_0 - \sigma_Y)}{\lambda + 2\mu/3}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_0^p - \frac{2}{3} \cdot \frac{P - (1 + \lambda/2\mu) \cdot (\sigma_0 - \sigma_Y)}{\lambda + 2\mu/3}$$

## Analyse de la décharge

Deux cas se présentent :

$$1) (\sigma_Y - \sigma_0) \cdot (1 + \lambda/2\mu) < P < 2\sigma_Y \cdot (1 + \lambda/2\mu)$$

- $\sigma_x$  varie de  $-P$  à  $0$  : la décharge est entièrement élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y \cdot \left( \frac{P}{(1 + \lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3} \cdot \left( \frac{P}{(1 + \lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_0}{\lambda + 2\mu/3}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_0^p - \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3} \cdot \left( \frac{P}{(1 + \lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \lambda/2\mu) \cdot \sigma_0}{\lambda + 2\mu/3}$$

$$2) P > 2\sigma_Y \cdot (1 + \lambda/2\mu)$$

- $\sigma_x$  varie de  $-P$  à  $-P + 2\sigma_Y \cdot (1 + \lambda/2\mu)$  : on est en régime élastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = -P + 2\sigma_Y \cdot (1 + \lambda/2\mu)$$

$$\sigma_r = -P + (1 + \lambda/\mu) \cdot \sigma_Y$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0 + \sigma_Y}{2\mu} - \frac{P + (1 + \lambda/2\mu) \cdot (\sigma_0 - \sigma_Y)}{\lambda + 2\mu/3}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_0^p - \frac{2}{3} \cdot \frac{P + (1 + \lambda/2\mu) \cdot (\sigma_0 - \sigma_Y)}{\lambda + 2\mu/3}$$

- $\sigma_x$  varie  $-P + 2\sigma_Y \cdot (1 + \lambda/2\mu)$  à  $0$  : on est en régime plastique. L'état final vaut :

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_r = -\sigma_Y$$

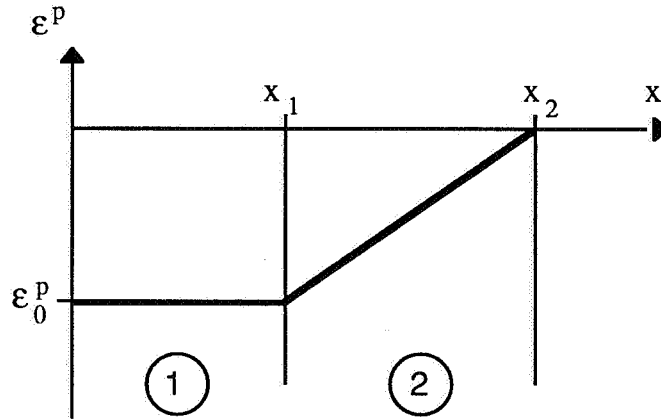
$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_0 + \sigma_Y}{\lambda + 2\mu/3}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_0^p - \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \lambda/2\mu) \cdot (\sigma_0 + \sigma_Y)}{\lambda + 2\mu/3}$$

Regardons de façon plus explicite ce que signifie ces résultats. Supposons que l'on ait préalablement appliqué un impact sur une cible d'une amplitude telle que :

$$P > 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

On sait que le champ de déformation plastique induit est tel que :



avec :

$$\varepsilon_0^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

On suppose que l'on fait un deuxième impact, identique au premier, au même endroit, suffisamment longtemps après le premier pour que l'état d'équilibre ait pu s'établir (v. chapitre suivant). Le calcul précédent permet de conclure que dans toute la zone saturée plastiquement, il va y avoir un accroissement de la déformation plastique tel que :

$$\frac{\Delta \varepsilon^p}{\varepsilon^p} = \frac{\sigma_0 + \sigma_Y}{\sigma_Y}$$

or, on verra dans le chapitre suivant que :

$$\sigma_0 \approx -0,6 \sigma_Y$$

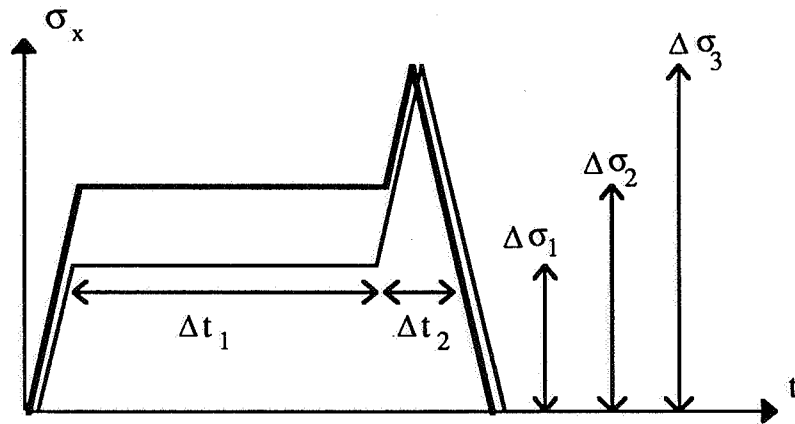
On en déduit que la déformation plastique, immédiatement après le deuxième impact, a augmenté d'environ 40 %.

Ce champ de déformation plastique a induit une contrainte résiduelle que l'on supposera proportionnelle en tout point à la déformation plastique (cette hypothèse sera précisée dans le chapitre suivant).

Dans la zone 1, la contrainte de compression due au premier impact provoque une augmentation de la limite d'élasticité dans cette zone (v. calcul précédent). Le front d'onde qui débouche dans la zone 2 a donc un précurseur élastique d'amplitude plus élevée que lors du premier impact.

On représente ci-après l'évolution de la contrainte en fonction du temps à l'abscisse  $x_1$  correspondant au premier (trait fin) et au deuxième (trait épais) impact.

En fait, la seule différence entre les deux impacts dans la propagation sur la zone 1, c'est la valeur de la limite d'élasticité. A la fin de la zone 1, le premier impact a cessé de saturer, son amplitude est donc exactement égale au double de la limite d'élasticité initiale.



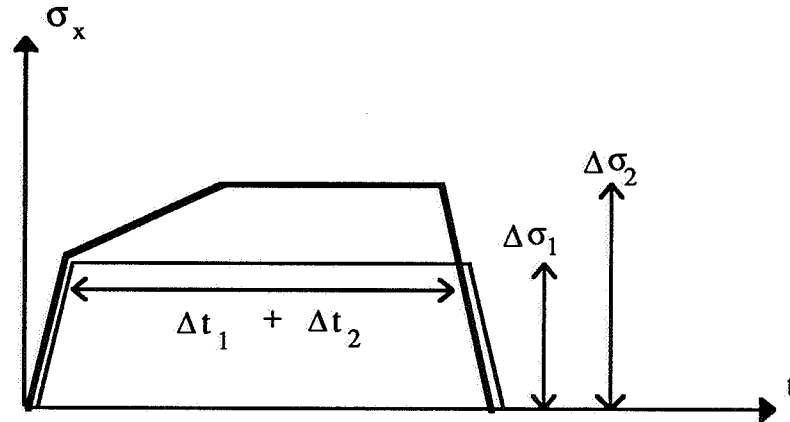
On a donc :

$$\Delta\sigma_1 = (1 + \lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y ; \Delta\sigma_2 = (1 + \lambda/2\mu) \cdot (\sigma_0 - \sigma_Y) ; \Delta\sigma_3 = 2(1 + \lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y$$

$\Delta t_1$  correspond au décalage en temps de l'onde élastique et de l'onde plastique acquis pendant leur propagation sur la longueur  $x_1$ .  $\Delta t_2$  correspond au temps que va mettre la décharge élastique à rattrapper la charge plastique sur leur propagation dans la zone 2. On a donc :

$$\Delta t_1 = \frac{x_1}{c_e - c_p} ; \Delta t_2 = \frac{x_2 - x_1}{c_e - c_p}$$

Dans la zone 2, la limite d'élasticité apparente baisse progressivement pour revenir à sa valeur initiale en  $x_2$ . On peut représenter de la même manière que ci-dessus l'évolution en fonction du temps pour chacun des deux impacts de la contrainte longitudinale à l'abscisse  $x_2$  :



L'onde issue du deuxième impact est donc encore plastique en  $x_2$ . Elle va plastifier le milieu sur une longueur  $l$  telle que :

$$l = (c_e - c_p)(\Delta t_1 + \Delta t_2)$$

d'où :

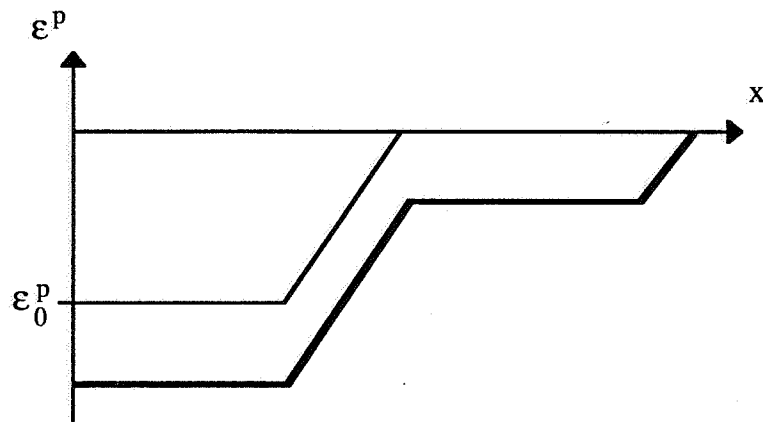
$$l = x_2$$

*La profondeur affectée plastiquement double donc avec le deuxième impact.*

De plus, il est aisé de vérifier que ce résultat ne dépend ni de la forme du champ de déformation plastique laissé par le premier impact, ni de la forme de l'onde qui se propage pourvu que la forme des deux impacts soit identique.

On peut enfin représenter la forme du champ de déformation plastique induit par le deuxième impact (en trait fort) :





On pourrait montrer de la même manière en analysant la propagation d'un troisième impact que la profondeur affectée augmente linéairement avec le nombre d'impact. Ce résultat n'est bien entendu applicable que tant que la profondeur affectée reste petite devant la taille (diamètre par exemple) de l'impact. Au-delà, l'onde qui se propage n'est plus plane, son amortissement plus rapide et l'augmentation de profondeur affectée plastiquement plus faible.

## Conclusion

Dans cette partie, on a calculé précisément le champ de déformation plastique induit derrière un impact rapide non visqueux d'amplitude limitée. On a montré que la déformation plastique arrive à saturation dès que :

$$P > 2\sigma_Y.(1+\lambda/2\mu)$$

et qu'alors la déformation plastique vaut :

$$\underline{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix}$$

avec :

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda+2\mu/3}$$

D'autre part, on a montré que ce champ n'était pas modifié par les ondes de surface induites par les perturbations latérales dues au passage de l'onde 'principale' si :

- l'impact est carré
- $2\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \cdot \sigma_Y < P < \frac{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda(3\lambda+2\mu)} \cdot \sigma_Y$

Enfin, on a montré qu'un deuxième impact augmente de 40 % l'amplitude de la déformation plastique, à condition que l'établissement de l'état d'équilibre ne reconduise pas à une replastification (v. chapitre suivant). De plus, ce deuxième impact double la profondeur affectée plastiquement. De manière plus générale, la profondeur affectée augmente linéairement avec le nombre d'impacts.





## Références

- [1] P. Forget, Thèse du Centre de Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (à paraître).



## Chapitre 4

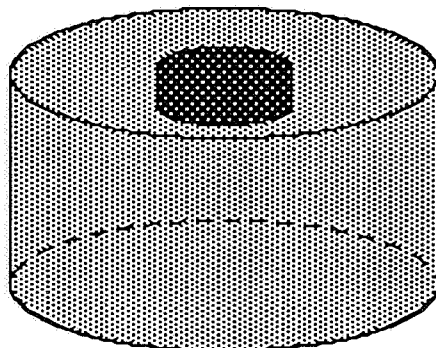
# **Calcul du champ de contrainte résiduelle induit par impact rapide non visqueux d'amplitude limitée dans un métal**

## **Introduction**

Cette partie constitue à la fois la suite logique et l'aboutissement des trois chapitres précédents. En effet, après avoir modélisé le matériau métallique, on a décrit la forme et l'évolution de l'onde induite par l'impact. On en déduit la forme du champ de déformation plastique induit. On a montré (v. chapitre 2 et 3) que ce champ de déformation plastique a une forme indépendante des conditions aux limites de la structure impactée. Cependant, longtemps après l'impact, la structure prend un état d'équilibre fonction de la déformation plastique induite. Mais, cet état d'équilibre dépend alors des conditions aux limites. Le problème de l'évaluation du champ de contrainte résiduelle est alors un problème de structure.

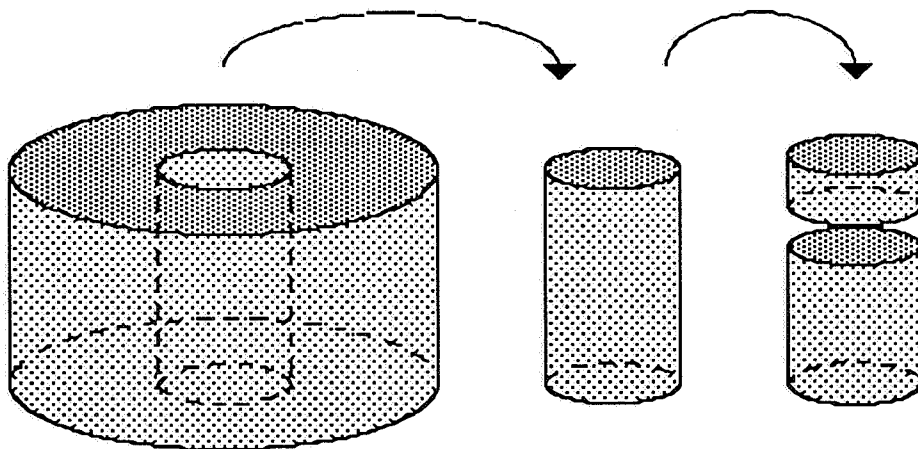
Pour illustrer ces propos, on peut faire l'analyse suivante :

Appliquer un impact revient à injecter une déformation plastique (du type de celle calculée au chapitre précédent) sur un volume d'épaisseur finie affleurant à une surface libre.



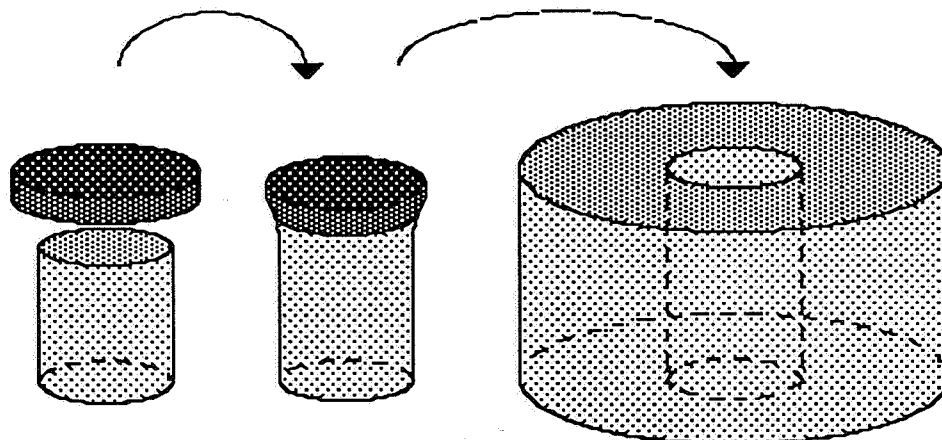
Pour appréhender phénoménologiquement le champ de contrainte résiduelle induit, on peut comparer cette 'injection' de déformation plastique à la suite artificielle d'opérations suivante :

- on commence par découper dans le massif un cylindre de même diamètre que la zone impactée que l'on extrait. Ensuite, on découpe la partie supérieure de ce cylindre de manière à avoir un volume identique à celui qui reçoit la déformation plastique. On induit la déformation plastique en écrasant ce volume par exemple avec une presse (notons que la déformation plastique induite par ce procédé aura la même forme que celle induite par l'impact). Il est important de noter qu'à ce niveau des opérations, le volume est libre de contrainte.



- Le volume déformé est ensuite recollé au cylindre. Cette opération introduit alors des contraintes de compression dans ce volume. On conçoit que les contraintes de surface sont d'autant plus importantes que l'épaisseur du volume déformé est faible. Le tout est ensuite remplacé dans le tube. Comme le volume a reçu de la déformation latérale, cette opération doit se faire en force et rajoute encore des contraintes de compression dans le volume déformé.





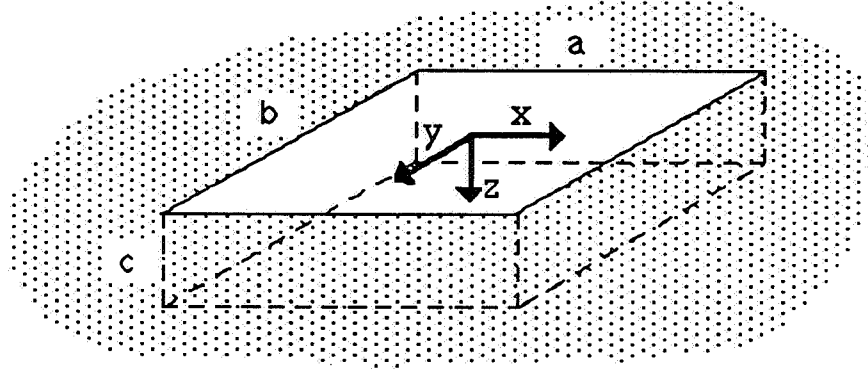
On s'aperçoit que les contraintes résiduelles ont deux origines : l'incompatibilité de la déformation plastique sur les bords de la zone impacté mais aussi, et nous verrons que c'est très important, l'incompatibilité de la déformation plastique dans la profondeur. On comprend aussi à travers cette analyse que la géométrie de la pièce impactée (par exemple ici la hauteur et le diamètre du massif) va avoir une influence déterminante sur le champ de contrainte résiduelle induit. Il est essentiel de comprendre que deux impacts sur des cibles de géométries différentes produiront le même champ de déformation plastique mais des champs de contrainte résiduelle différents. Nous allons maintenant quantifier ces remarques phénoménologiques.

## 1. Calcul préliminaire

On considère une inclusion parallélépipédique de côtés  $a, b$  et  $c$ , affleurant à la surface d'un milieu semi-infini.

Cette inclusion est constituée du même matériau élastique que le massif semi-infini, mais on suppose qu'il existe dans tout le volume de l'inclusion une déformation plastique homogène du type :

$$\underline{\epsilon}^p = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^p \end{pmatrix}$$



On s'intéresse au champ de contrainte résultant dans le massif. Ce problème a l'avantage de pouvoir se résoudre totalement analytiquement. Les calculs ont été menés par Lin (v. [2]) dans le cas d'une inclusion cubique. Nous l'avons étendu ici au parallélépipède. Les détails du calcul, trop lourd pour figurer à ce niveau, sont reportés en Annexe A. Le champ de contrainte résultant s'exprime par :

$$\underline{\sigma} = -2\mu\underline{\epsilon}^p + \underline{\Delta\sigma}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xx} = & \frac{-\mu\epsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \left\{ 2\nu \left( \text{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z_1 r_{111}} - \text{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z_1 r_{121}} - \text{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z_1 r_{211}} + \text{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z_1 r_{221}} \right) \right. \\ & + 2\nu(3-4\nu) \left( \text{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z_2 r_{112}} - \text{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z_2 r_{122}} - \text{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z_2 r_{212}} + \text{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z_2 r_{222}} \right) \\ & - 4\nu c \left[ \frac{x_1}{x_1^2 + z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) + \frac{y_1}{y_1^2 + z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{212}} - \frac{x_1}{r_{112}} \right) + \frac{y_2}{y_2^2 + z_2^2} \left( \frac{x_1}{r_{122}} - \frac{x_2}{r_{222}} \right) \right] \\ & + z_1 \left[ \frac{x_1}{x_1^2 + z_1^2} \left( \frac{y_2}{r_{121}} - \frac{y_1}{r_{111}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_1^2} \left( \frac{y_1}{r_{211}} - \frac{y_2}{r_{221}} \right) \right] + (3-4\nu) z_1 \left[ \frac{x_1}{x_1^2 + z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) \right] \\ & + 2czz_2 \left[ \frac{2x_1}{(x_1^2 + z_2^2)^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) + \frac{2x_2}{(x_2^2 + z_2^2)^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) + \frac{x_1}{x_1^2 + z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}^3} - \frac{y_1}{r_{112}^3} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}^3} - \frac{y_2}{r_{222}^3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4(1-v)(1-2v)\left[-\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_2}{x_1r_{112}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_2}{x_1r_{122}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_2}{x_2r_{212}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_2}{x_2r_{222}}\right. \\
& \quad \left.+\operatorname{Arctg}\frac{y_1z}{x_1r_{110}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_2z}{x_1r_{120}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_1z}{x_2r_{210}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_2z}{x_2r_{220}}\right] \\
& -8v(1-v)\left(\operatorname{Arctg}\frac{x_1y_1}{zr_{110}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_1y_2}{zr_{120}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_2y_1}{zr_{210}}+\operatorname{Arctg}\frac{x_2y_2}{zr_{220}}\right) \\
& -4(1-v)z\left[\frac{x_1}{x_1^2+z^2}\left(\frac{y_2}{r_{120}}-\frac{y_1}{r_{110}}\right)+\frac{x_2}{x_2^2+z^2}\left(\frac{y_1}{r_{210}}-\frac{y_2}{r_{220}}\right)\right] \\
& +(1-v)\left(\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_2}{x_1r_{112}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_2}{x_1r_{122}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_1}{x_1r_{111}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_1}{x_1r_{121}}\right. \\
& \quad \left.-\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_2}{x_2r_{212}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_2}{x_2r_{222}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_1}{x_2r_{211}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_1}{x_2r_{221}}\right) \\
& +v\left(\operatorname{Arctg}\frac{x_1z_2}{y_1r_{112}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_2z_2}{y_1r_{212}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_1z_1}{y_1r_{111}}+\operatorname{Arctg}\frac{x_2z_1}{y_1r_{211}}\right. \\
& \quad \left.-\operatorname{Arctg}\frac{x_1z_2}{y_2r_{122}}+\operatorname{Arctg}\frac{x_2z_2}{y_2r_{222}}+\operatorname{Arctg}\frac{x_1z_1}{y_2r_{121}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_2z_1}{y_2r_{221}}\right) \\
& -2v\left(\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_2}{x_1r_{112}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_2}{x_1r_{122}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_1z}{x_1r_{110}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_2z}{x_1r_{120}}\right. \\
& \quad \left.-\operatorname{Arctg}\frac{y_1z_2}{x_2r_{212}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_2z_2}{x_2r_{222}}+\operatorname{Arctg}\frac{y_1z}{x_2r_{210}}-\operatorname{Arctg}\frac{y_2z}{x_2r_{220}}\right) \\
& -4v^2\left(\operatorname{Arctg}\frac{x_1z_2}{y_1r_{112}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_2z_2}{y_1r_{212}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_1z}{y_1r_{110}}+\operatorname{Arctg}\frac{x_2z}{y_1r_{210}}\right. \\
& \quad \left.-\operatorname{Arctg}\frac{x_1z_2}{y_2r_{122}}+\operatorname{Arctg}\frac{x_2z_2}{y_2r_{222}}+\operatorname{Arctg}\frac{x_1z}{y_2r_{120}}-\operatorname{Arctg}\frac{x_2z}{y_2r_{220}}\right) \\
& +\frac{x_2}{2}\left[\frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{r_{222}}-\frac{y_1}{r_{212}}\right)+\frac{z_1}{x_2^2+z_1^2}\left(\frac{y_1}{r_{211}}-\frac{y_2}{r_{221}}\right)\right]-\frac{x_1}{2}\left[\frac{z_2}{x_1^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{r_{122}}-\frac{y_1}{r_{112}}\right)+\frac{z_1}{x_1^2+z_1^2}\left(\frac{y_1}{r_{111}}-\frac{y_2}{r_{121}}\right)\right] \\
& +(1+2v)c\left[\frac{x_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{r_{222}}-\frac{y_1}{r_{212}}\right)-\frac{x_1}{x_1^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{r_{122}}-\frac{y_1}{r_{112}}\right)\right] \\
& +2vc\left[\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2}\left(\frac{x_2}{r_{222}}-\frac{x_1}{r_{122}}\right)-\frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\left(\frac{x_2}{r_{212}}-\frac{x_1}{r_{112}}\right)\right] \\
& +2vx_2\left[\frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_1}{r_{212}}-\frac{y_2}{r_{222}}\right)+\frac{z}{x_2^2+z^2}\left(\frac{y_2}{r_{220}}-\frac{y_1}{r_{210}}\right)\right]-2vx_1\left[\frac{z_2}{x_1^2+z_2^2}\left(\frac{y_1}{r_{112}}-\frac{y_2}{r_{122}}\right)+\frac{z}{x_1^2+z^2}\left(\frac{y_2}{r_{120}}-\frac{y_1}{r_{110}}\right)\right] \\
& +cx_2z\left[\frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_1}{r_{212}^3}-\frac{y_2}{r_{222}^3}\right)+\frac{2z_2}{(x_2^2+z_2^2)^2}\left(\frac{y_1}{r_{212}}-\frac{y_2}{r_{222}}\right)\right]-cx_1z\left[\frac{z_2}{x_1^2+z_2^2}\left(\frac{y_1}{r_{112}^3}-\frac{y_2}{r_{122}^3}\right)+\frac{2z_2}{(x_1^2+z_2^2)^2}\left(\frac{y_1}{r_{112}}-\frac{y_2}{r_{122}}\right)\right]
\end{aligned}$$

où :

$$x_1 = x - a/2 \quad y_1 = y - b/2 \quad z_1 = z - c$$

$$x_2 = x + a/2 \quad y_2 = y + b/2 \quad z_2 = z + c$$

$$r_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2} \quad i,j,k = 1 \text{ ou } 2$$

$$r_{ij0} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_0^2} \quad i,j = 1 \text{ ou } 2$$

Ce calcul préliminaire (assez lourd, il faut l'admettre) étant effectué, nous allons montrer qu'il permet de déterminer les contraintes induites par impact laser dans les principales configurations.

## 2. Contraintes résiduelles induites par un impact isolé

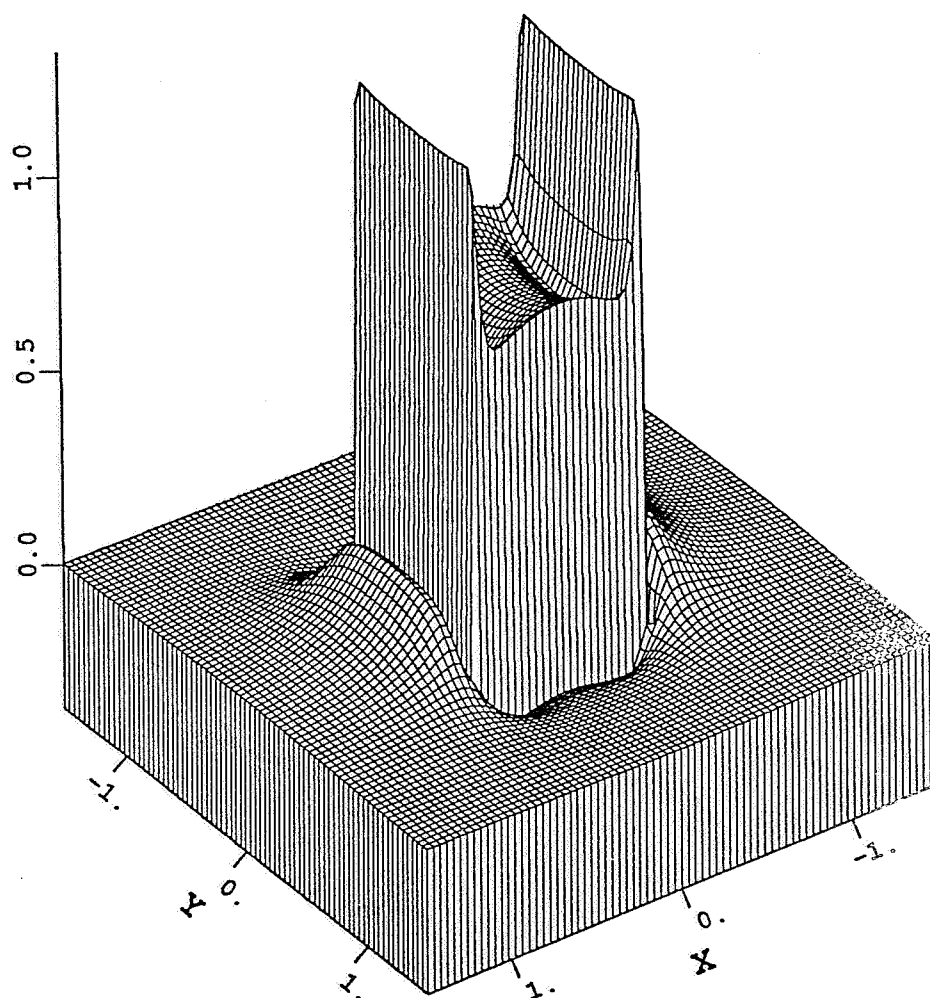
Nous nous intéressons ici à un impact isolé (que nous allons supposer carré dans un premier temps) ayant produit une déformation plastique homogène sur une épaisseur finie à la surface d'un massif semi-infini. On notera  $a$  le côté du carré et  $c$  l'épaisseur de la zone affectée plastiquement. La contrainte  $\underline{\sigma}$  induite dans le massif est alors donnée par le calcul précédent dans lequel on remplace  $b$  par  $a$  (v. résultats complets en annexe A). Au centre de l'impact, à la surface, la contrainte a la forme suivante :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(0,0,0) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xx}(0,0,0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de remarquer que la fonction  $\sigma_{xx}(x,y,0)$  est à peu près homogène (si l'on excepte les singularités épineuses localisées sur les bords) sur la surface de l'impact. Cette remarque est justifiée par le graphique de la page suivante sur lequel, on a tracé la forme de la fonction  $\sigma_{xx}(x,y,0)$ . Pour représenter cette fonction, on a choisi :

$$v = 1/3 \quad \text{et} \quad c/a = 1/10$$

$$\frac{\sigma_{xx}(x,y,0)}{\mu\epsilon^p}$$



theta: 55 phi: 35

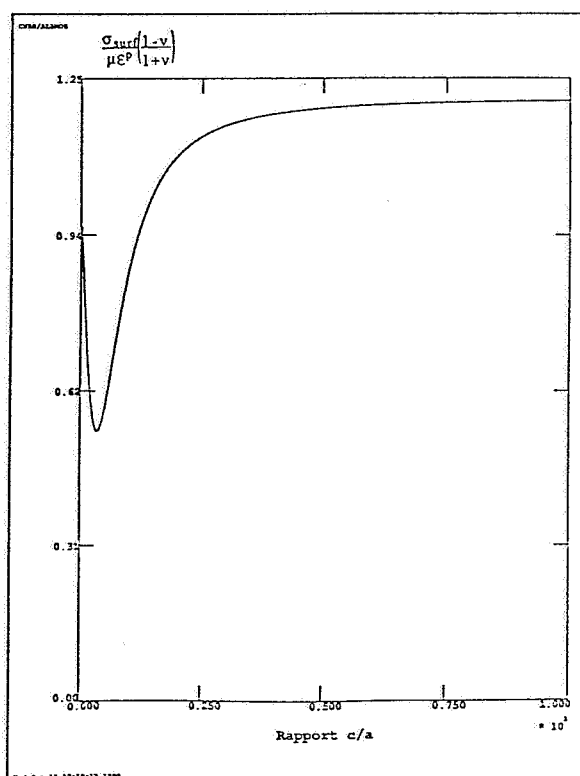
Wed Sep 12 15:39:33 1990

On constate donc, vu la forme de  $\sigma_{xx}(x,y,0)$ , que  $\sigma_{xx}(0,0,0)$ , la contrainte au centre de l'impact, est représentative de la contrainte de surface sur tout l'impact (si on excepte là encore les singularités très localisées sur les bords). Grâce au calcul précédent, cette contrainte s'exprime facilement par :

$$\sigma_{\text{surf}} = \frac{-\mu \varepsilon P}{2\pi(1-\nu)} \left[ 4(1-2\nu)(3\nu-1) \text{Arctg} \frac{c}{r} + 3(1+\nu) \frac{a^2 c}{r(a^2/4 + c^2)} + 8\nu(1-2\nu) \text{Arctg} \frac{a^2}{4cr} - 2\pi(1-\nu)(1+4\nu) \right]$$

où :  $r^2 = a^2/2 + c^2$

Cette fonction qui ne dépend que du rapport  $c/a$  a l'allure suivante :



Il est remarquable de constater que si, comme on s'y attend intuitivement, la contrainte diminue au départ avec la profondeur affectée plastiquement, elle réaugmente dès que le rapport  $c/a$  n'est plus petit devant 1.

Cependant, on a supposé  $c \ll a$ , il est alors naturel de faire un développement limité à l'ordre 1 en  $c/a$ :

$$\sigma_{\text{surf}} = \mu \epsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right]$$

Notons que, si la déformation plastique est égale à la valeur de saturation (obtenue, rappelons-le, pour  $P > 2(1+\lambda/2\mu)\sigma_Y$ ), alors cette expression devient :

$$\sigma_{\text{surf}} = -\sigma_Y \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right]$$

Il est remarquable de constater que pour un impact isolé, on n'obtient comme contrainte de surface la limite d'élasticité que lorsque la profondeur affectée plastiquement tend vers 0 (ou lorsque les dimensions de l'impact deviennent très grandes).

Cette formule associée au calcul de la déformation plastique décrit dans le chapitre précédent va permettre d'optimiser la contrainte de surface induite par impact rapide. En effet, considérons une loi de pression 'créneau' appliquée à la surface d'un métal. On appelle toujours  $P$  son amplitude et  $\tau$  sa durée. Lorsque  $P$  croît de  $(1+\lambda/2\mu)\sigma_Y$  à  $2(1+\lambda/2\mu)\sigma_Y$ , la valeur de la déformation plastique augmente, alors que la profondeur affectée reste la même. On en déduit que la contrainte de surface augmente. Puis, lorsque  $P$  dépasse  $2(1+\lambda/2\mu)\sigma_Y$ , la déformation plastique reste constante à la valeur de saturation, alors que la profondeur affectée plastiquement augmente. La contrainte de surface diminue donc. On en déduit qu'il existe une valeur optimale de l'amplitude de pression appliquée permettant de maximiser la contrainte résiduelle de surface.

Cet optimum est obtenu pour :

$$P = 2 \left( 1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) \sigma_Y$$

La contrainte de surface vaut alors :

$$\sigma_{\text{surf}} = - \sigma_Y \cdot \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)}{\pi} \frac{c_e c_p \tau}{a(c_e - c_p)} \right]$$

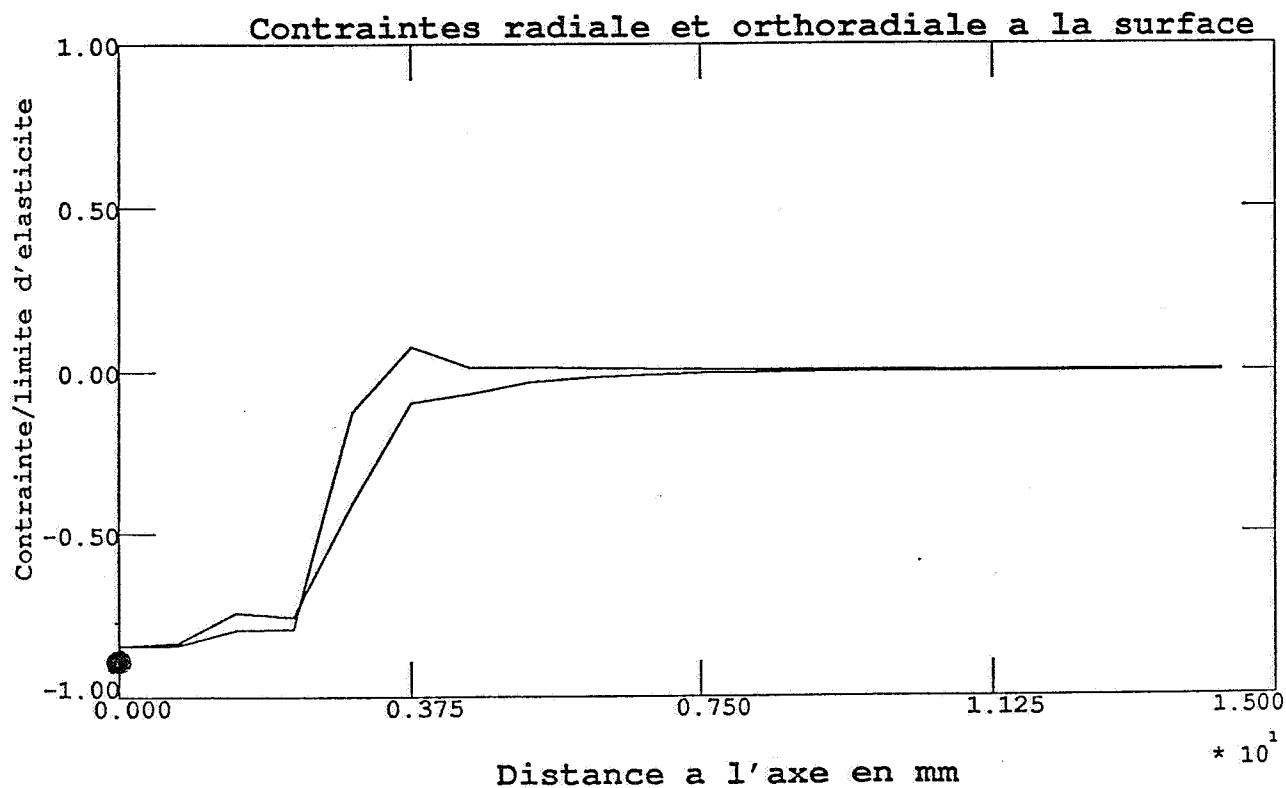
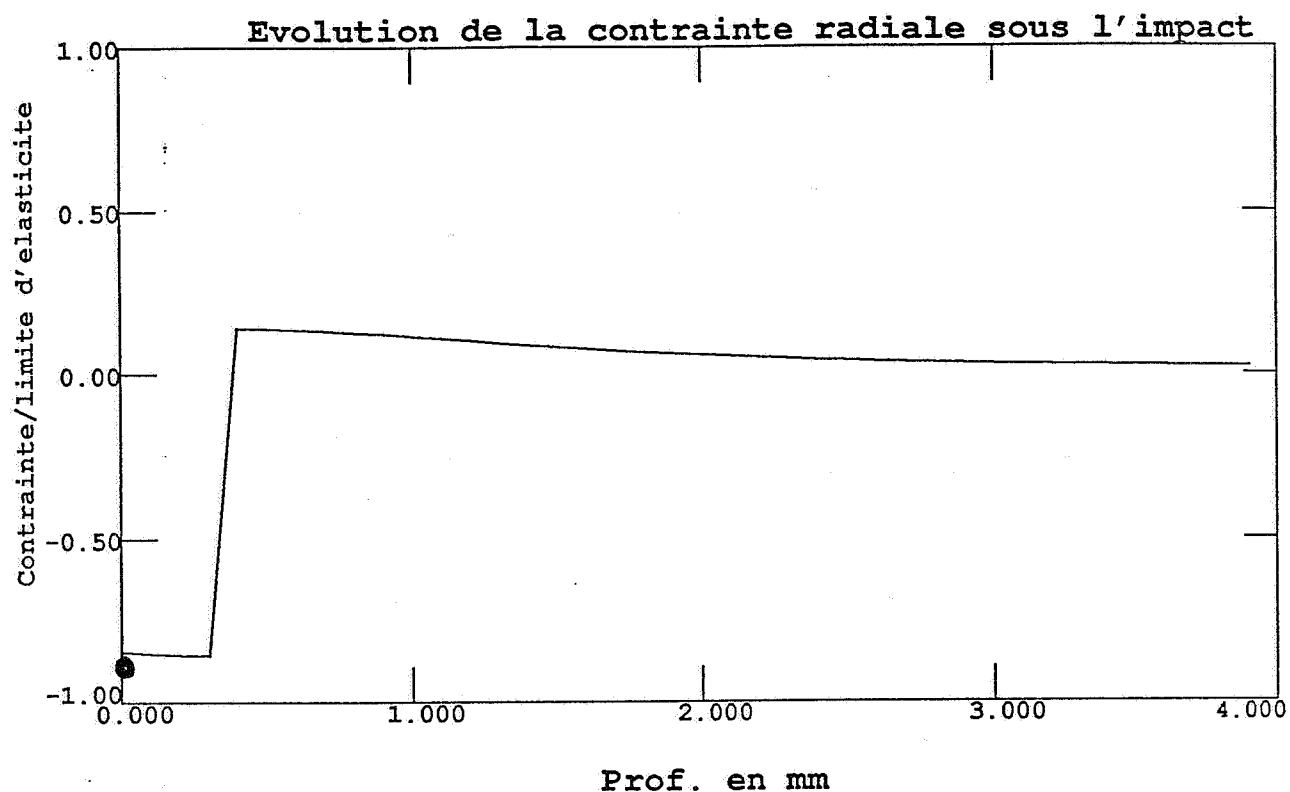
Application numérique : la contrainte de surface obtenue à la surface d'acier 35CD4 30 et 50 HRC à l'aide d'un impact de 5 mm de côté vaut :

$\tau = 10 \text{ ns}$	35CD4 30 HRC	$\sigma_{\text{surf}} = - 780 \text{ MPa}$
	35CD4 50 HRC	$\sigma_{\text{surf}} = - 1100 \text{ MPa}$
$\tau = 50 \text{ ns}$	35CD4 30 HRC	$\sigma_{\text{surf}} = - 440 \text{ MPa}$
	35CD4 50 HRC	$\sigma_{\text{surf}} = - 650 \text{ MPa}$

Pour conclure cette partie, on peut ajouter la remarque suivante : un calcul numérique élastique quasi-statique axisymétrique à déformation initiale imposée homogène sur une épaisseur finie donne la même contrainte de surface au centre que le modèle précédent. La géométrie de l'impact (circulaire ou carré) n'a donc que peu d'influence sur la contrainte induite (si l'on suppose, bien sûr, que la déformation plastique est homogène). Pour illustrer ce propos, on a représenté ci-après, un calcul numérique axisymétrique (correspondant donc à un impact circulaire) avec une déformation plastique homogène sur une épaisseur d'un dixième du diamètre de l'impact. On a fait figurer l'évolution de la contrainte radiale en fonction du rayon à la surface du massif. Le point qui figure au centre représente la prédiction de la contrainte au centre par le modèle précédent. On constate que l'accord est très bon.



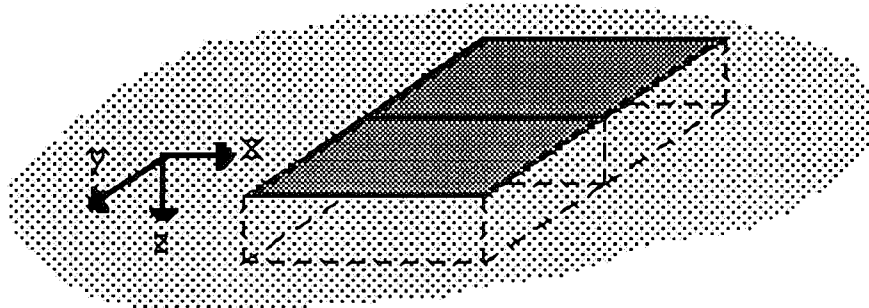
## CONTRAINTE RESIDUELLE (AXISYMETRIQUE)



Si l'on veut donc affiner la description du champ de déformation plastique dans l'impact (notamment prendre une variation quelconque dans la profondeur) pour en déduire le champ de contrainte résiduelle induit, il suffira donc de faire un calcul numérique élastique quasi-statique axisymétrique (donc bidimensionnel).

### 3. Effet d'un impact juxtaposé

On s'intéresse ici au problème suivant : on a calculé dans la partie précédente le champ de contrainte induit par un impact isolé. On vient maintenant ajouter un deuxième impact juste à côté du précédent.



Le problème que l'on se pose est le suivant : les contraintes dans le premier impact sont-elles modifiées par la présence d'un deuxième impact ?

Là encore, le calcul préliminaire permet de répondre. En effet, il suffit de remplacer  $b$  par  $2a$  dans ce résultat et de regarder la valeur de la contrainte au centre (on fait ici l'hypothèse implicite que la faible valeur des contraintes induites par le premier impact autour de lui-même n'a pas perturbé la propagation de l'onde associé au deuxième impact et que, donc, la déformation plastique induite dans le deuxième

impact est identique à celle introduite dans le premier). Après développement limité à l'ordre 1 en  $c/a$ , il vient :

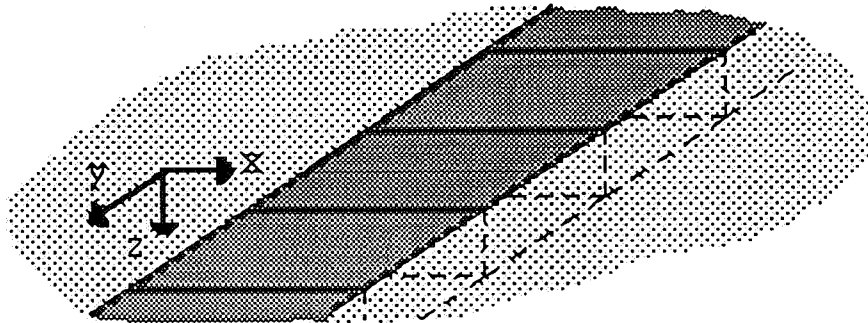
$$\sigma_{\text{surf } xx} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{5}(4+\nu)c}{5\pi a} \right] \right)$$

$$\sigma_{\text{surf } yy} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{5}(1+4\nu)c}{5\pi a} \right] \right)$$

On en déduit, en comparant avec la formule obtenue dans le cas de l'impact isolé, que à profondeur affectée égale, le fait d'avoir juxtaposé un deuxième impact a diminué la contrainte dans le sens  $x$  et augmenté la contrainte dans le sens  $y$ .

#### 4. Contraintes dans une bande infinie d'impacts

On suppose que l'on a réalisé maintenant une bande infinie d'impacts juxtaposés selon le principe schématisé ci-dessous :



On veut déterminer le champ de contrainte induit dans la bande. Là encore, le calcul préliminaire va permettre de répondre : il suffit de faire tendre  $b$  vers l'infini.

Après développement limité à l'ordre 1 en  $c/a$ , la contrainte induite à la surface de la bande traitée vaut :

$$\sigma_{\text{surf } xx} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ 1 - \frac{8}{\pi} \frac{c}{a} \right] \right)$$

$$\sigma_{\text{surf } yy} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[ 1 - \frac{8\nu \cdot c}{\pi \cdot a} \right]$$

Par rapport à l'impact isolé, la contrainte dans le sens travers (selon x) a diminué alors que celle dans le sens long (selon y) a augmenté. Il est également clair que ces contraintes seront d'autant plus importantes que la bande est large et que la profondeur affectée est petite. Si la déformation plastique est à sa valeur maximale, les contraintes à la surface de la bande s'expriment par :

$$\sigma_{\text{surf } xx} = - \sigma_Y \left[ 1 - \frac{8 \cdot c}{\pi \cdot a} \right]$$

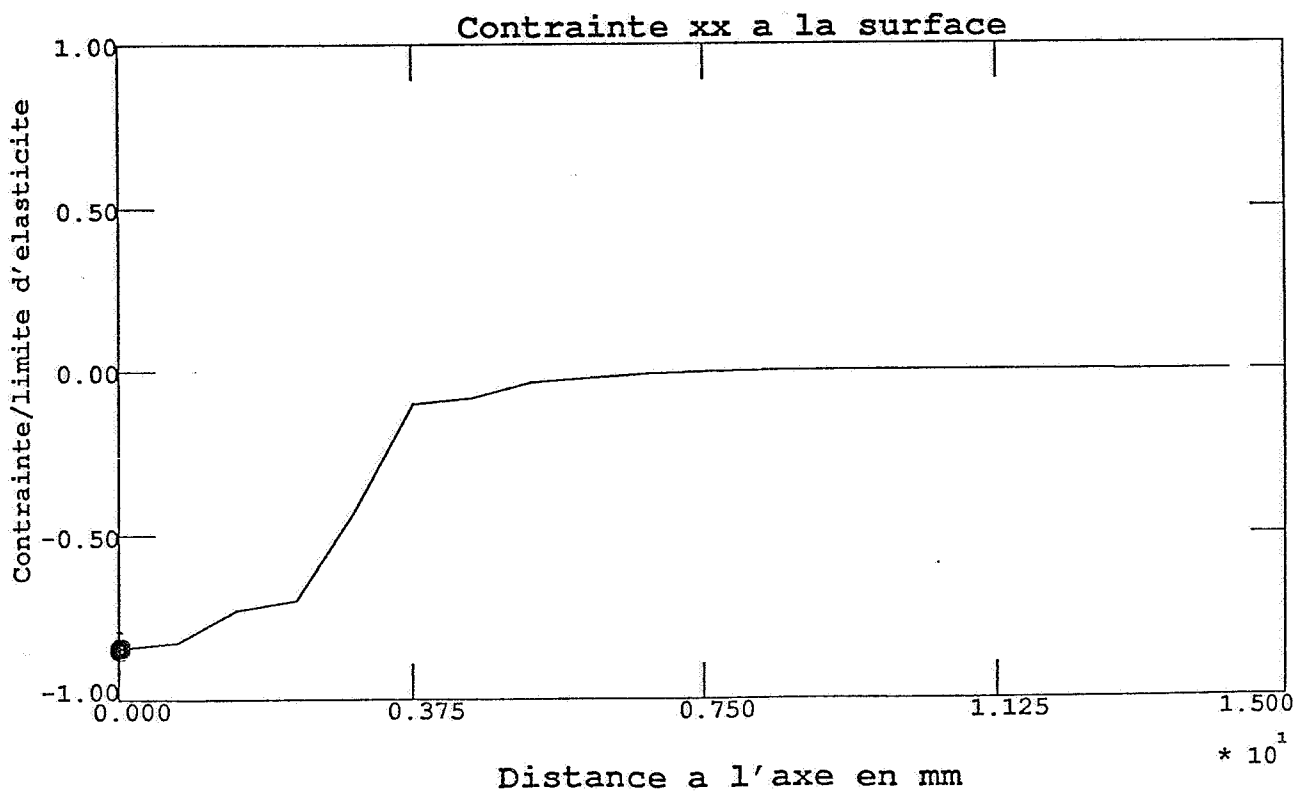
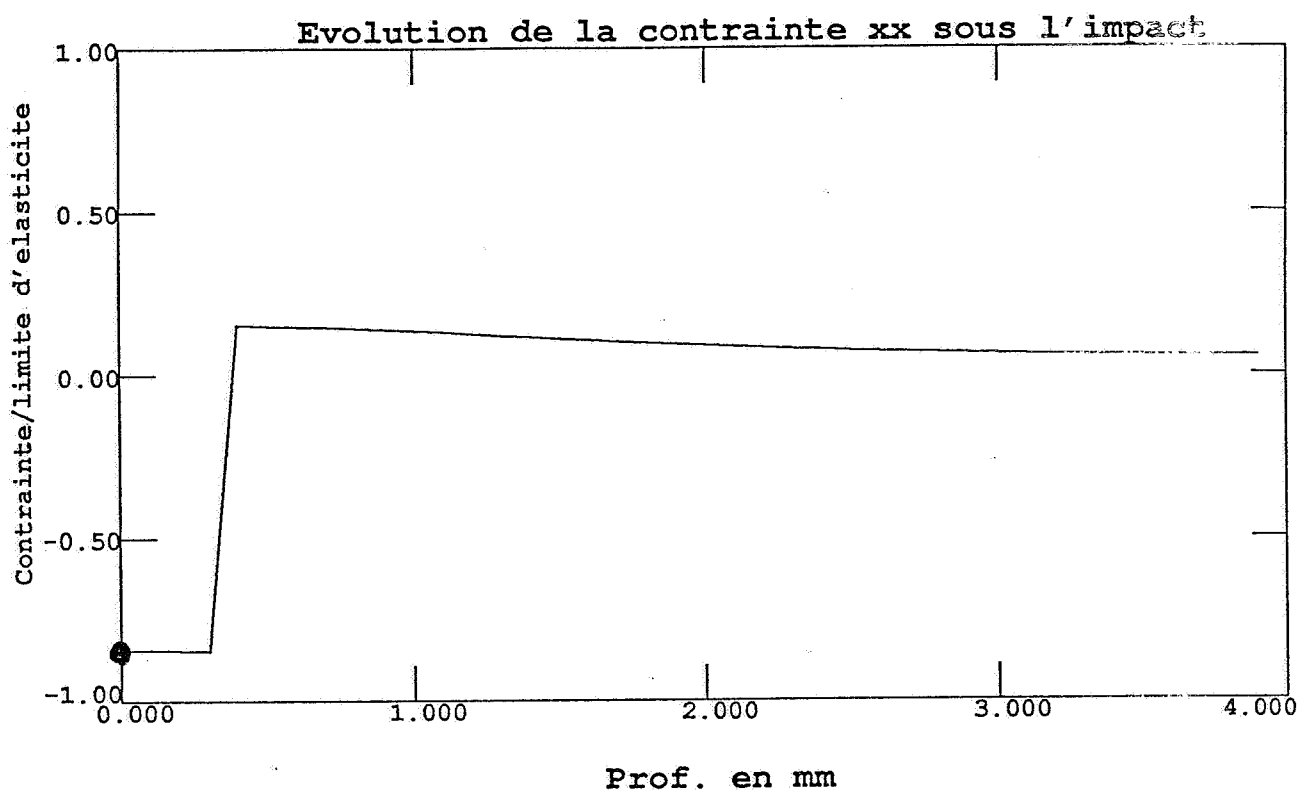
$$\sigma_{\text{surf } yy} = - \sigma_Y \left[ 1 - \frac{8\nu \cdot c}{\pi \cdot a} \right]$$

Après avoir énoncé ces résultats, on peut faire la remarque suivante : en regardant la limite lorsque b tend vers l'infini des six composantes du tenseur  $\underline{\Delta\sigma}$  du calcul préliminaire (v. Annexe C pour le calcul complet), on s'aperçoit que cette limite est en déformation plane. Le problème global n'est pas lui en déformation plane puisque, rappelons-le :

$$\underline{\sigma} = - 2\mu \varepsilon^p + \lim_{b \rightarrow \infty} [\underline{\Delta\sigma}]$$

et que  $2\mu \varepsilon^p$  n'est pas, lui, associé à une déformation plane. Cependant, on peut penser qu'un calcul élastique bidimensionnel en déformation plane avec une déformation initiale prise égale à  $\varepsilon^p$  donnera une bonne estimation de la contrainte au moins selon l'axe des x. On va le vérifier sur les résultats d'un calcul élastique bidimensionnel en déformation plane où l'on introduit une déformation plastique homogène sur une épaisseur telle que c/a soit égal à un dixième. On constate sur cet exemple (représenté à la page suivante) que le calcul analytique (tridimensionnel exact) et le calcul numérique (bidimensionnel en déformation plane donc approché) conduisent à la même prédiction de la contrainte en surface (la valeur déduite du calcul analytique est représentée par le gros point noir).

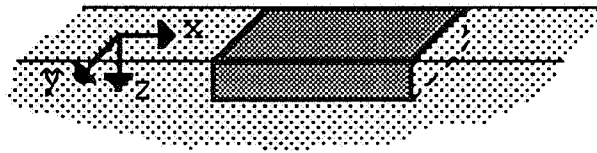
## CONTRAINTE RESIDUELLE EN DEF. PLANE



Si l'on veut donc affiner la description du champ de déformation plastique dans la bande (notamment prendre une variation quelconque dans la profondeur) pour en déduire le champ de contrainte résiduel induit, il suffira donc de faire un calcul numérique élastique quasi-statique en déformation plane (donc bidimensionnel).

## 5. Contraintes induites par un impact sur une tranche

On s'intéresse maintenant au cas de l'impact sur une fine tranche.



Si l'épaisseur de la tranche est petite devant  $a$  et devant  $c$ , on peut alors supposer que la contrainte est plane dans toute la tranche. Or, on dispose de la solution  $\underline{\Delta\sigma}$  en déformation plane. Il suffit donc de remplacer  $\nu$  par  $\nu/(1+\nu)$  dans son expression pour avoir  $\underline{\Delta\sigma}$  en contrainte plane. Le champ de contrainte résultant s'obtient ensuite par :

$$\underline{\sigma} = -2\mu\underline{\varepsilon}^p + \underline{\Delta\sigma}$$

Après développement limité à l'ordre 1 en  $c/a$ , il vient :

$$\sigma_{\text{surf } xx} = \mu\varepsilon^p \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \frac{(1+2\nu)(1-\nu)}{(1+\nu)} \right] \right] \left[ 1 - \frac{8}{\pi} \frac{c}{a} \right]$$

Dans le cas où la déformation plastique est à sa valeur maximale, cette formule devient :

$$\sigma_{\text{surf } xx} = -\sigma_Y \left[ \frac{(1+2\nu)(1-\nu)}{(1+\nu)} \right] \left[ 1 - \frac{8}{\pi} \frac{c}{a} \right]$$

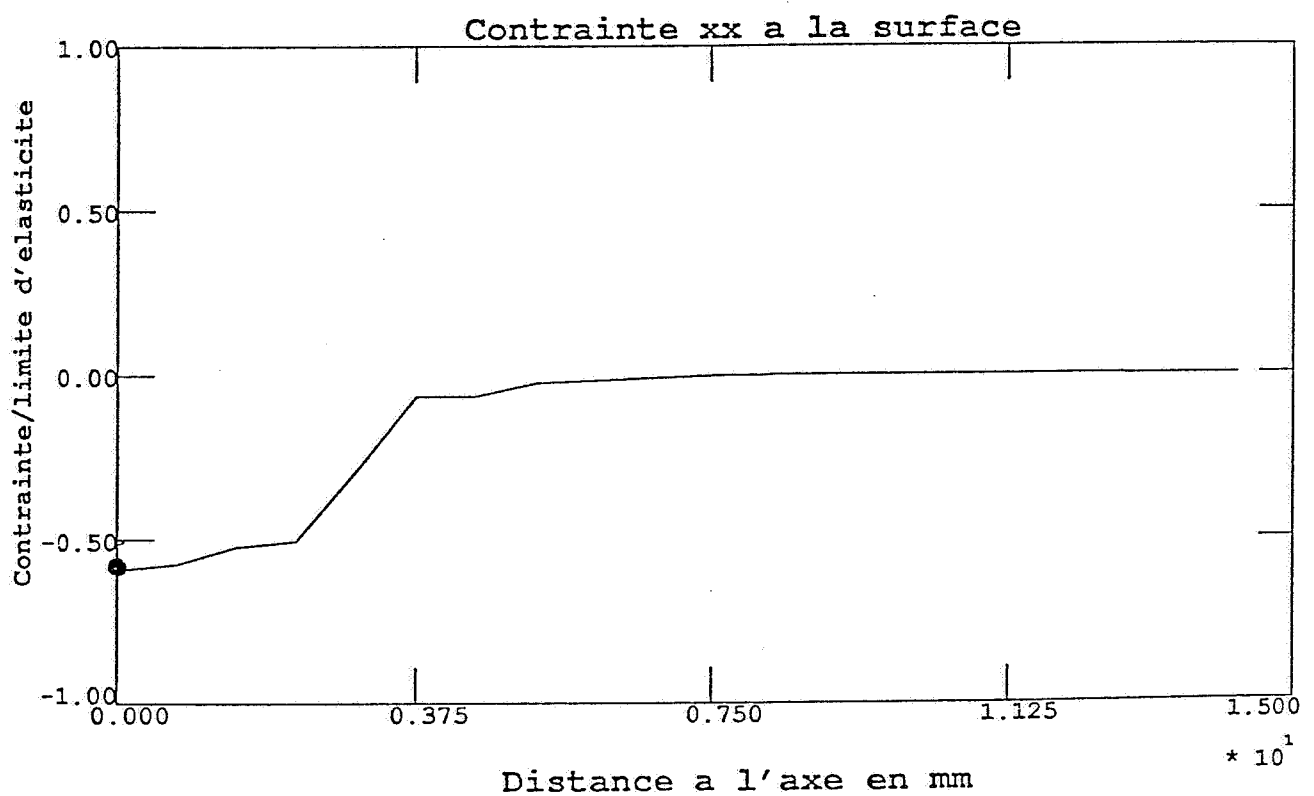
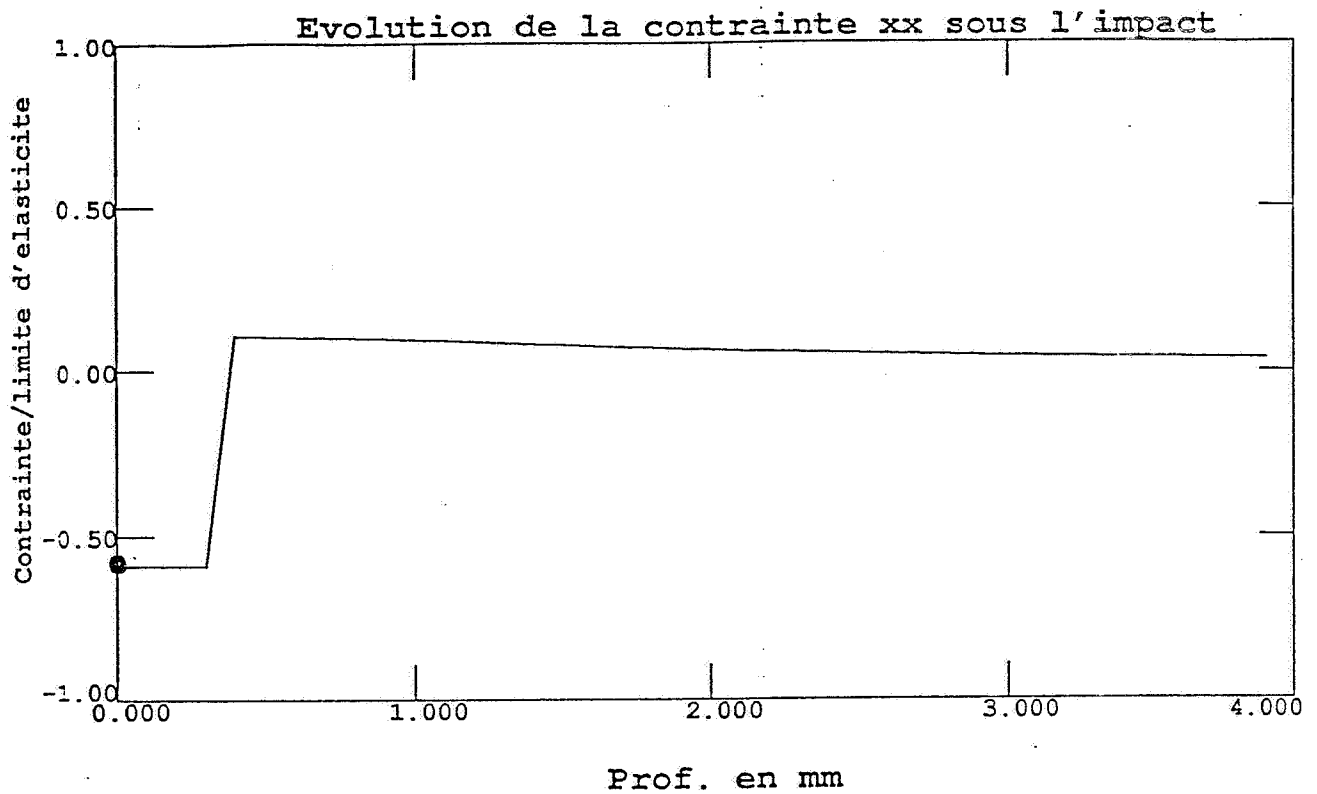
le rapport  $(1+2\nu)(1-\nu)/(1+\nu)$  valant approximativement  $2/3$ . Dans cette configuration, la contrainte de surface induite ne peut donc excéder les  $2/3$  de la limite d'élasticité.

Notons bien que dans ce cas, le calcul analytique est très approché car  $2\mu \underline{\epsilon}^p$  n'est pas un champ de contrainte plane. Cependant, on peut penser comme précédemment que la contrainte le long de l'axe des  $x$  est correctement prédite. Pour vérifier cette hypothèse, nous allons, de la même manière que précédemment, effectuer un calcul numérique bidimensionnel en contrainte plane avec une déformation initiale prise égale à  $\underline{\epsilon}^p$ . Là encore, on a choisi de prendre un rapport  $c/a$  égal à un dixième. Les gros points noirs correspondent toujours à la prédiction analytique de la contrainte de surface.

On remarque de nouveau que l'accord est parfait. C'est, dans ce cas, d'autant plus intéressant que le calcul analytique et le calcul numérique sont tous deux des solutions approchées du problème réel mais, ce à partir d'hypothèses différentes. En effet, le calcul numérique fait l'hypothèse de contrainte plane, ce qui n'est pas le cas du calcul analytique qui ne résoud pourtant pas le problème réel. Cette cohérence, bien que ne constituant pas une preuve, peut donc nous rendre confiant sur la validité des deux approches pour traiter le problème réel.

Ainsi, là encore, si l'on veut affiner la description du champ de déformation plastique dans l'impact (notamment prendre une variation quelconque dans la profondeur) pour en déduire le champ de contrainte résiduel induit, il suffira donc de faire un calcul numérique élastique quasi-statique en contrainte plane (donc bidimensionnel).

## CONTRAINTE RESIDUELLE EN CONTR. PLANE





## 6. Retour sur les superpositions d'impacts

Dans le chapitre précédents, nous avons étudié l'effet d'un deuxième impact, appliqué après un temps suffisamment long sur le premier, sur le champ de déformation plastique. Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour regarder ce qu'il en est en terme de champ de contrainte résiduelle.

Considérons un premier impact carré. On note  $P$  l'amplitude de la pression appliquée (supposée uniforme pendant une durée  $\tau$ ). On sait que le champ de déformation plastique induit est uniforme sur une profondeur  $c$  et a la forme :

$$\underline{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix}$$

avec :

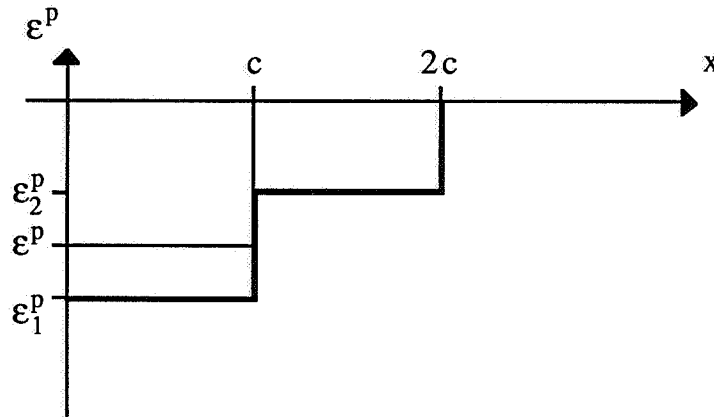
$$\begin{aligned} \varepsilon^p &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} \cdot \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right) & \text{si } (1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y < P < 2(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y \\ \text{et } \varepsilon^p &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} & \text{si } P > 2(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y \end{aligned}$$

On sait aussi par l'analyse qui précède que la contrainte résultant en surface vaut :

$$\sigma_{\text{surf}} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right]$$

Si l'on excepte les singularités épineuses très localisées sur les bords, on peut alors raisonnablement supposer que la contrainte est uniforme dans la zone déformée plastiquement. Cette approximation est d'autant meilleure que le rapport  $c/a$  est petit.

On connaît donc la déformation plastique et la contrainte résiduelle induites à l'équilibre par le premier impact. Le calcul de la déformation plastique obtenue après le deuxième impact a été effectuée à la fin du chapitre précédent. Après calcul, il a ici la forme suivante (on a représenté en trait fin la valeur de  $\epsilon^p$  après le premier impact et en trait épais la distribution de  $\epsilon^p$  après le deuxième impact) :



avec :

$$\epsilon_1^p = \epsilon^p \left( 1 + \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right) \quad \epsilon_2^p = \epsilon^p \left( 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right)$$

On constate que le deuxième tir a augmenté la déformation plastique de surface, ce qui tend à augmenter la contrainte de surface, mais que ce deuxième tir a également accru l'épaisseur affectée plastiquement, ce qui tendrait à diminuer la contrainte de surface. Il s'agit donc de savoir lequel de ces deux phénomènes l'emporte pour savoir si le deuxième tir diminue ou augmente la contrainte de surface.

La réponse est facile à donner. En effet, la déformation plastique après le deuxième impact est la somme de deux déformations plastiques homogènes sur des profondeurs finies :

$\epsilon_2^p$  sur une profondeur  $2c$  et  $\epsilon_1^p - \epsilon_2^p$  sur une profondeur  $c$ .

On sait, à l'aide du calcul préliminaire, calculer la contrainte de surface induite par chacun de ces deux champs de

déformation plastique, et, donc, d'après le principe de superposition, la contrainte induite par la somme de ces deux champs est la somme des contraintes induites par chacun. On a donc (à l'ordre 1 en  $c/a$ ) :

$$\sigma_{\text{surf}} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right] \left[ 1 - \frac{8\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right] + \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \frac{8\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right] \right.$$

$$\left. \sigma_{\text{surf}} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right] \right) \right]$$

On en déduit le résultat suivant extrêmement remarquable : *un deuxième tir, identique au précédent et appliqué au même endroit, double la profondeur contrainte (déformée plastiquement) mais ne change pas la contrainte de surface.*

## Conclusion

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé analytiquement le champ de déformation plastique induit par un impact rapide sur une surface. Dans ce chapitre, en supposant la déformation plastique homogène sur une épaisseur finie, on a exprimé la contrainte résiduelle de surface induite. Cette contrainte vaut :

$$\sigma_{\text{surf}} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)c}{\pi a} \right] \right]$$

Ce calcul a pu également être étendu au cas de l'impact sur une tranche et de la bande infinie d'impacts. De plus, on a montré que des calculs numériques élastiques *bidimensionnels* permettait de traiter très facilement ces trois problèmes dans le cas de distribution quelconque de déformation plastique dans la profondeur.

On a également montré qu'un deuxième impact, superposé au premier, double la profondeur contrainte mais ne change pas la valeur de la contrainte de surface.

## Références

- [1] T. Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", Martinus Nijhoff Publishers, The Hague/Boston/London, 1982.
- [2] T. H. Lin & T. K. Tung, "The Stress Field Produced by Localized Plastic Slip at a Free Surface", Journal of Applied Mechanics, September 1962.

## ***Partie II***

### **Application au choc-laser**









## Chapitre 1

# Génération d'impacts rapides par laser

## Introduction

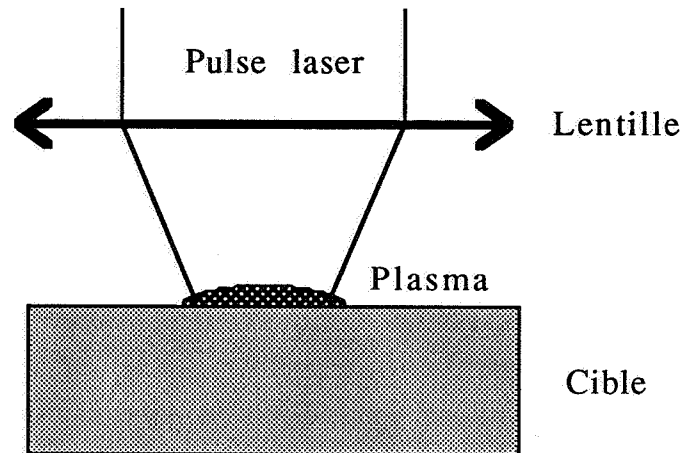
Dans la partie I nous avons étudié, d'un point de vue essentiellement théorique, la réponse d'une cible métallique à ce que nous avons appelé un impact rapide. Cet impact rapide consistait en l'application, pendant un temps suffisamment court, d'une pression spatialement uniforme sur une partie de la surface de la cible.

Nous allons maintenant nous intéresser à la manière de générer un tel impact rapide. Il existe essentiellement trois techniques : la collision de plaques, les explosifs et le choc-laser. La collision de plaques consiste en la projection à grande vitesse d'une feuille suffisamment mince sur la cible. Le choc-laser est une technique plus récente permettant un grand nombre de configurations. C'est cette dernière que nous allons développer. Nous allons détailler ici le principe d'obtention d'impact rapide au moyen d'un laser impulsif et donner les ordres de grandeurs accessibles à l'heure actuelle.

### 1. Principe du choc-laser en interaction directe

La fusion thermonucléaire contrôlée par confinement inertiel laser a motivé récemment de nombreuses études sur la physique de l'interaction laser-matière. Le cadre de ces études

est toujours l'interaction d'un pulse laser de durée variant de la picoseconde ( $10^{-12}$  s) à la centaine de nanoseconde ( $10^{-7}$  s) pour des flux lumineux (intensité par unité de surface) allant jusqu'à  $10^{18}$  W/cm<sup>2</sup>. Sans vouloir rentrer dans les détails, nous allons essayer de décrire phénoménologiquement les mécanismes d'absorption de la lumière laser.



Dans un premier temps, l'onde électromagnétique arrive sur la cible et pénètre sur une épaisseur dite de peau (inférieure au micron) dans la cible. Sur cette épaisseur l'onde électromagnétique excite les électrons et les chauffe de telle sorte que la surface de la cible est sublimé en un gaz ionisé appelé plasma. Ce mécanisme a reçu le nom 'd'ablation'. Le reste du rayonnement laser va alors interagir avec le plasma dès que sa densité dépasse la densité dite critique au-delà de laquelle le plasma devient opaque au rayonnement. Trois mécanismes d'absorption du rayonnement interviennent alors dans le plasma :

- Absorption collisionnelle ou Bremsstrahlung inverse. Les électrons libres soumis au champ électromagnétique se mettent à osciller perpendiculairement à la direction de propagation. Ces électrons entre en collision avec les ions et l'énergie des photons est absorbée sous forme de quantité de mouvement des particules du plasma.

Ce mécanisme lorsqu'il est dominant dans l'interaction peut assurer une absorption quasi-totale. Il est favorisé par les impulsions laser longues, les courtes longueurs d'onde et les flux pas trop élevés.

- Absorption résonante. Elle apparaît dans certaines configurations géométriques entre le champ électromagnétique de la lumière laser et le gradient de la densité de charge dans le plasma. Les oscillations de charge ou ondes plasma sont alors favorisées et elles s'amplifient (résonance) jusqu'à la densité critique où le champ électrostatique devient très grand. Des électrons (dits suprathermiques) sont alors accélérés à grande vitesse et absorbent une fraction non négligeable de l'énergie laser (jusqu'à 30 %).
- Instabilités paramétriques. Ce sont des mécanismes de couplage entre le laser, les électrons et les ions du plasma qui apparaissent à flux élevé. Ces couplages de trois ondes peuvent conduire à :
  - des instabilités dites de chauffage qui sont des mécanismes d'absorption de l'énergie laser.
  - des instabilité dites de rétrodiffusion qui sont des mécanismes de réflexion.

Ajoutons que pour les flux relativement faibles (en dessous de  $10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>) seul subsiste le mécanisme d'absorption collisionnelle.

Le résultat de l'interaction d'un pulse laser de forte intensité avec la cible est donc la production puis l'échauffement d'un plasma à la surface de la cible. Ce plasma à haute température est formé en un temps très court (de toute façon inférieur à la durée du pulse laser), sa pression est donc très élevée. P. Mora a modélisé l'interaction laser-matière à flux modéré (compris entre  $10^{10}$  et  $10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>). En supposant l'interaction régie par le mécanisme

d'absorption collisionnelle, il a trouvé que si l'intensité lumineuse à la surface de la cible est une fonction gaussienne du temps alors la pression du plasma est également une fonction gaussienne du temps de même largeur à mi-hauteur et son amplitude s'écrit :

$$P_{(\text{kBar})} = 3 \Phi_{(\text{GW/cm}^2)}^{3/4} \cdot \lambda_{(\mu\text{m})}^{-1/4} \cdot \tau_{(\text{ns})}^{-1/8} \cdot Z^{-9/16} \cdot A^{7/16}$$

où :

- $\Phi$  est l'intensité lumineuse maximum,
- $\lambda$  la longueur d'onde du laser,
- $\tau$  la durée de l'impulsion (en fait la largeur à mi-hauteur de la gaussienne),
- $Z$  le numéro atomique du matériau constituant la cible,
- $A$  sa masse atomique.

Application numérique : les seuls lasers, à l'heure actuelle, capables de délivrer des flux supérieurs au gigawatt par centimètre carré sont les laser de durée d'impulsion inférieure à 100 nanosecondes. Il s'agit essentiellement de lasers au verre dopé néodyme. L'ordre de grandeur de l'énergie maximale par pulse délivrée par un tel laser est de 100 Joules. La pression maximale atteinte sur la surface  $S$  d'une cible en Aluminium par un laser délivrant 100 Joules en 10 nanosecondes est alors :

$$P_{(\text{kBar})} = \frac{12,6}{S_{(\text{cm}^2)}^{3/4}}$$

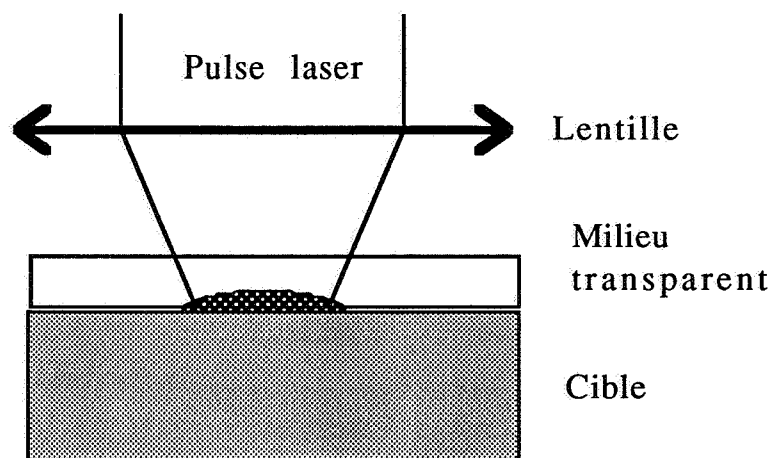
On ne pourra donc atteindre une pression de 50 kBars ou 5000 MPa que sur une surface de 0,16 cm<sup>2</sup>.

Cette technique de génération d'impacts donne donc des pressions un peu faibles pour être réellement exploitable. Notons également, que dans cette technique, il est essentiel de placer la cible sous vide. En effet, lorsque l'on focalise l'impulsion laser à des flux supérieurs au gigawatt par centimètre carré dans l'air, il apparaît un phénomène de claquage qui empêche l'énergie lumineuse d'atteindre la cible.

Toutes ces raisons rendent extrêmement intéressante l'interaction laser-matière dite 'confinée'.

## 2. Principe du choc-laser en interaction confinée

Le principe de base de l'interaction laser-matière en confiné est la limitation de la détente du plasma par la présence d'un milieu solide à la surface de la cible.



Pour réaliser pratiquement une telle configuration, il suffit de placer à la surface de la cible un milieu transparent (verre, eau, etc...) au rayonnement laser de telle sorte que le plasma soit formé à l'interface entre la cible et le milieu transparent.

L'interaction laser-matière en confiné a été modélisée dans [4]. Nous allons maintenant reprendre ce modèle en affinant la description du comportement du matériau cible (prise en compte de l'élasto-plasticité) de manière à pouvoir prédire le signal de pression qui en résulte.

## 2.1. Hypothèses et notations

On suppose la cible constituée d'un matériau élasto-plastique parfait. On note  $\rho$  sa densité,  $\sigma_Y$  sa limite d'élasticité en traction simple,  $c_e$  et  $c_p$  les célérités d'ondes élastique et plastique. On rappelle (cf chapitre 2, partie I) que :

$$c_e = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu/3}{\rho}}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé du matériau cible. Le milieu transparent est supposé élastique linéaire. On note  $\rho_t$  et  $c_t$  la densité et la célérité des ondes dans ce milieu. L'irradiation par le pulse laser est assimilé à l'existence d'une intensité lumineuse par unité de surface  $\Phi$  constante pendant la durée  $\tau$ . On suppose qu'une fraction  $1-\alpha$  de l'énergie sert à ioniser le plasma et que le reste se retrouve sous forme d'énergie mécanique et thermique dans le plasma supposé être un gaz parfait. On notera  $P(t)$  la pression du plasma,  $v_c(t)$  et  $v_t(t)$  les vitesses matérielles aux surfaces respectivement de la cible et du milieu transparent,  $L_c(t)$  et  $L_t(t)$  l'écart par rapport à leur position initiale des surfaces respectivement de la cible et du milieu transparent.

## 2.2. Calcul de la pression résultante

$$0 < t < \tau$$

Le bilan énergétique supposé dans les hypothèses s'écrit :

$$\alpha\phi t = \frac{3}{2}n(t)kT + P(t)[L_c(t)+L_t(t)]$$

où encore :

$$\alpha\phi t = \frac{5}{2}P(t)[L_c(t)+L_t(t)]$$

D'autre part, si l'on suppose (ce que l'on vérifiera par la suite) que pendant l'émission laser  $P$  est une fonction non décroissante du temps alors les résultats du chapitre 2 de la partie I permettent d'écrire :

$$\frac{dL_t(t)}{dt} = v_t(t) = \frac{P(t)}{\rho_t c_t}$$

$$\frac{dL_c(t)}{dt} = v_c(t) = \frac{P(t)}{\rho c_e} + \frac{c_e - c_p}{\rho c_e c_p} (P(t) - (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y) Y(P(t) - (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y)$$

où  $Y()$  est la fonction de Heaviside.

On a donc à résoudre un système de trois équations différentielles couplées qui s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha\phi t = \frac{5}{2} P(t) [L_c(t) + L_t(t)] \\ \frac{dL_t(t)}{dt} = \frac{P(t)}{\rho_t c_t} \\ \frac{dL_c(t)}{dt} = \frac{P(t)}{\rho c_e} + \frac{c_e - c_p}{\rho c_e c_p} (P(t) - (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y) Y(P(t) - (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y) \end{cases}$$

La solution en est :

$$\text{Si } \alpha\phi \leq \frac{5}{2} \left( \frac{1}{\rho_t c_t} - \frac{1}{\rho c_e} \right) (1 + \lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2$$

la cible reste élastique. La pression appliquée est constante pendant la durée d'irradiation laser et vaut :

$$P(t) = \sqrt{\frac{2}{5} \frac{\rho_t c_t + \rho c_e}{\rho \rho_t c_t c_e} \alpha\phi}$$

$$\text{Si } \alpha\phi \geq \frac{5}{2} \left( \frac{1}{\rho_t c_t} - \frac{1}{\rho c_e} \right) (1 + \lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2$$

la cible devient plastique. La pression appliquée reste constante jusqu'à l'instant  $\tau$  et vaut :

$$P(t) = \frac{(c_e - c_p) \rho_t c_t}{2 c_e (\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu) \sigma_Y + \sqrt{\left[ \frac{(c_e - c_p) \rho_t c_t}{2 c_e (\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu) \sigma_Y \right]^2 + \frac{2}{5} \frac{\rho \rho_t c_t c_p}{\rho_t c_t + \rho c_p} \alpha\phi}$$

La pression maximale atteinte croît donc comme la racine carrée du flux laser.

$$t > \tau$$

L'irradiation laser étant terminée, on suppose maintenant que le plasma subit une détente adiabatique. Le plasma étant supposé suivre le comportement des gaz parfaits, on a :

$$P(t) = P(\tau) \left( \frac{L_t(\tau) + L_c(\tau)}{L_t(t) + L_c(t)} \right)^\gamma$$

$$\text{Si } \alpha\phi \leq \frac{5}{2} \left( \frac{1}{\rho_t c_t} - \frac{1}{\rho_c c_e} \right) (1 + \lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2$$

la pression dans la cible n'a pas dépassé la limite d'élasticité d'Hugoniot. L'onde induite dans la cible est élastique et l'on a :

$$\frac{dL_t(t)}{dt} = \frac{P(t)}{\rho_t c_t} \quad \frac{dL_c(t)}{dt} = \frac{P(t)}{\rho_c c_e}$$

d'où :

$$P(t) = P(\tau) \left[ 1 + \frac{\gamma+1}{\tau} (t - \tau) \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}$$

On en déduit la largeur temporelle à mi-hauteur  $\tau_p$  de l'impulsion de pression :

$$\tau_p = \tau \frac{2^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \gamma}{1 + \gamma}$$

$$\text{Si } \frac{5}{2} \left( \frac{1}{\rho_t c_t} - \frac{1}{\rho_c c_e} \right) (1 + \lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2 \leq \alpha\phi \leq 5 \left( \frac{2}{\rho_t c_t} - \frac{c_e + c_p}{\rho_c c_e c_p} \right) (1 + \lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2$$

la pression atteinte dans le plasma est telle que l'onde de décharge dans la cible est élastique. Le calcul de l'élargissement temporel de l'impulsion



de pression par rapport à l'impulsion laser n'est plus analytique. Cependant, on peut penser que l'ordre de grandeur est conservé, d'autant plus que dans le cas élastique, il est apparu que cet élargissement temporel est indépendant des matériaux constituant la cible et le milieu transparent.

$$\text{Si } \alpha\phi \geq 5 \left( \frac{2}{\rho_t c_t} - \frac{c_e + c_p}{\rho c_e c_p} \right) (1 + \lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2$$

la pression atteinte dans le plasma est maintenant telle que l'onde de charge induite dans la cible est élastique au départ puis plastique.

### 2.3. Bilan des résultats obtenus

Si l'on envoie un flux laser  $\Phi$  pendant un temps  $\tau$  à l'interface entre un milieu transparent élastique et une cible constituée d'un milieu élasto-plastique, il apparaît un signal de pression à l'interface d'amplitude :

$$P = \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu) \sigma_Y + \sqrt{\left[ \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu) \sigma_Y \right]^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{\rho \rho_t c_t c_p}{\rho_t c_t + \rho c_p} \alpha\phi}$$

dès que :  $\alpha\phi \geq \frac{5}{2} \left( \frac{1}{\rho_t c_t} - \frac{1}{\rho c_e} \right) (1 + \lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2$  (flux minimum pour activer la plasticité dans la cible). La durée de ce signal de pression s'écrit :

$$\tau_p = \tau \frac{2^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \gamma}{1 + \gamma}$$

#### Application numérique :

- Milieu transparent en verre, cible en aluminium irradiée à 10 GW/cm<sup>2</sup> avec une impulsion laser de durée 30 ns :

$$P = 8200 \text{ MPa ou } 82 \text{ kBars}$$

$$\tau_p = 60 \text{ ns}$$

où l'on a pris :

$$\rho_t = 2320 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_t = 5640 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_p = 5100 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\alpha = 0,25 \text{ (extrapolé à partir des résultats expérimentaux de la quatrième partie)}$$

$$\gamma = 1,4$$

- Milieu transparent aqueux, cible en aluminium irradiée à  $10 \text{ GW/cm}^2$  avec une impulsion laser de durée  $30 \text{ ns}$  :

$$P = 3600 \text{ MPa ou } 36 \text{ kBars}$$

$$\tau_p = 60 \text{ ns}$$

où l'on a pris :

$$\rho_t = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_t = 1450 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_p = 5100 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\alpha = 0,25$$

$$\gamma = 1,4$$

- Cible en aluminium sans confinement irradiée avec un flux de  $10 \text{ GW/cm}^2$ . Le modèle de P. Mora présenté dans la première partie prévoit :

$$P = 1000 \text{ MPa ou } 10 \text{ kBars}$$

$$\tau_p = 30 \text{ ns}$$

On constate sur ces illustrations qu'à flux laser donné, le confinement augmente à la fois l'amplitude et la durée du signal de pression et que le confinement par

un matériau solide est deux fois plus efficace que par un liquide.

## 2.4. Deux limitations sur le choc-laser en confiné

La première de ces limitations est évidente. Du fait de la présence du milieu transparent à la surface de la cible, on ne peut faire croître le flux laser à l'infini car au-delà d'un flux limite appelé seuil de claquage, le milieu transparent confinant devient opaque à la lumière laser. La pression maximale atteignable en confiné est donc limitée par le seuil de claquage du milieu transparent. Cette pression maximale sera évaluée dans la quatrième partie de ce chapitre.

La deuxième limitation vient du fait que les surfaces en contact à l'interface entre la cible et le milieu transparent ne sont pas parfaites. Appelons  $R$  la rugosité, c'est-à-dire l'épaisseur des vides pouvant se trouver à l'interface. Pour que l'effet de confinement soit sensible, il faut que l'écartement théorique des deux surfaces limitant la détente du plasma à la fin de l'émission laser soit grand devant cette rugosité. En reprenant les notations du modèle développé ci-dessus, cette condition s'écrit :

$$L_c(\tau) + L_t(\tau) \gg R$$

Les calculs effectués plus haut permettant d'évaluer la quantité  $L_c(\tau) + L_t(\tau)$ , cette condition devient :

$$\tau P(\tau) \gg R \frac{\rho_t c_t c_e}{\rho_t c_t + \rho c_e}$$

où l'on n'a gardé que le comportement élastique de la cible pour déterminer l'ordre de grandeur de cette limitation sur la durée d'impulsion laser.

#### Application numérique :

Dans le cas d'une interface entre du verre et de l'aluminium ayant une rugosité d'un micron, si la pression atteinte est de 5000 MPa, pour que l'effet de confinement soit sensible, il faut :

$$\tau \gg 1,5 \text{ ns}$$

où l'on a pris :

$$\rho_t = 2320 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_t = 5640 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_e = 6260 \text{ m.s}^{-1}$$

### **3. Séparation des effets thermiques et mécaniques**

Nous avons vu que le résultat de l'interaction du faisceau laser avec la cible était la production d'un plasma à haute pression et haute température. Du point de vue de la cible il s'agit donc d'une sollicitation à la fois en pression et en température. Or, si dans les chapitres précédents, nous avons analysé les effets d'une sollicitation en pression, nous n'avons pas du tout pris en compte de sollicitation thermique.

Nous allons maintenant évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la cible affectée thermiquement. Cette épaisseur se décompose de la manière suivante : elle est la somme de l'épaisseur sublimée en plasma et de l'épaisseur chauffée par le plasma.

#### **3.1. Evaluation de l'épaisseur sublimée en plasma.**

Pour ce calcul, nous allons supposer que toute l'énergie contenue dans l'impulsion laser incidente sert à vaporiser et à chauffer le plasma.

On note  $E$  l'énergie laser par unité de surface de la cible contenue dans un pulse,  $\Delta H_s$  l'enthalpie de sublimation,  $c_v$  la capacité calorifique du plasma,  $T$  la température atteinte dans le plasma,  $\rho$  la densité de la cible et  $e_s$  l'épaisseur de la cible sublimée en plasma. On a alors :

$$E = \rho e_s (\Delta H_s + c_v \cdot T)$$

en supposant la température atteinte par le plasma très supérieure à la température de vaporisation de la cible. On a alors :

$$e_s = \frac{E}{\rho (\Delta H_s + c_v \cdot T)}$$

Application numérique : on considère une cible en aluminium. La température du plasma a été évaluée par D. Devaux dans [5] par l'analyse de son rayonnement. On prend :

$$\begin{aligned} E &= 100 \text{ J/cm}^2 \\ \rho &= 2700 \text{ kg/m}^3 \\ T &= 50000 \text{ }^\circ\text{K} \\ \Delta H_s &= 350 \text{ Cal/g} \\ c_v &= 0,1 \text{ Cal/g/}^\circ\text{K} \end{aligned}$$

on a alors :

$$e_s = 15 \text{ } \mu\text{m}$$

Cette épaisseur serait de 80 microns si la température du plasma n'atteignait que 10000  $^\circ\text{K}$ .

### 3.2. Evaluation de l'épaisseur chauffée

Soit un corps de capacité calorifique  $c$  de densité  $\rho$  et de conductivité thermique  $K$ . On sait que la propagation de la chaleur selon une dimension dans un tel corps est approximativement régie par l'équation dite de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Si l'on considère un massif semi-infini initialement à température nulle et que l'on applique sur toute sa surface une sollicitation en température  $T_s(t)$  alors la température dans le corps est donnée aux instants ultérieurs par (v. [1]) :

$$T(x,t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi}} [a(t-s)]^{-3/2} T_s(s) e^{-\frac{x^2}{4a(t-s)}} ds$$

où :

$$a = \frac{K}{\rho c}$$

On suppose que le plasma est à la température  $T$  pendant un temps  $\tau$ . Calculons la réponse de la cible à cette sollicitation thermique. On a, pour  $t > \tau$  :

$$T(x,t) = \frac{T \cdot x}{\sqrt{4\pi}} \int_{a(t-\tau)}^{at} \frac{e^{-\frac{x^2}{4s}}}{s^{3/2}} ds$$

d'où :

$$T(x,t) \leq \frac{T \cdot x \cdot a \cdot \tau}{\sqrt{4\pi}} \text{Max}_s \left[ \frac{e^{-\frac{x^2}{4s}}}{s^{3/2}} \right]$$

$$T(x,t) \leq \frac{a \cdot T \cdot \tau}{x^2 \sqrt{4\pi}} \left( \frac{6}{e} \right)^{3/2}$$

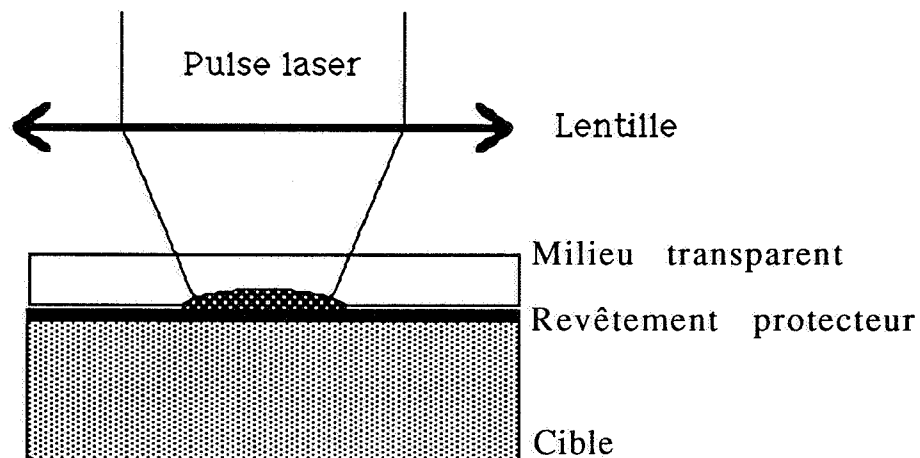
Application numérique : on considère une cible en aluminium sur laquelle a été produit un plasma qui applique à la surface de la cible une température de 50000 °K pendant 50 ns. Alors, la formule précédente permet d'affirmer que l'épaisseur de la cible chauffée localement à plus de 500 °K est inférieure à :

$$e_T = 20 \mu\text{m}$$

où l'on a pris la diffusivité thermique  $a$  de l'aluminium égale à :

$$a = 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

On constate, au vu de ces évaluations, que l'épaisseur  $e_s + e_T$  affectée thermiquement est largement inférieure à 100 microns pour une cible en aluminium. En fait, on peut penser que quel que soit le matériau constituant la cible, cet ordre de grandeur sera conservé. L'épaisseur affectée thermiquement sera donc dans tous les cas largement inférieure à l'épaisseur affectée plastiquement. L'idée d'isoler la cible des effets thermiques par un revêtement protecteur apparaît alors naturellement. On dispose avant l'irradiation un revêtement d'épaisseur une centaine de micron sur la cible de manière à ce que la sollicitation appliquée à la cible soit purement mécanique. La technique d'obtention d'un impact rapide par laser se schématise alors de la manière suivante :



Cette technique va nous permettre de générer des impacts rapides totalement indépendamment d'effets thermiques. Nous allons maintenant caractériser expérimentalement les impacts obtenus de cette manière.

## 4. Caractérisation expérimentale des impacts obtenus par choc-laser

Dans cette partie, nous allons présenter des résultats de mesure d'amplitude de signaux de pression obtenus par choc-laser confiné dans diverses configurations. Puis, nous comparerons ces résultats aux prédictions du modèle développé dans la seconde partie.

### 4.1. Description de la technique de mesure

La technique de mesure que nous avons employée est basée sur l'utilisation d'un quartz piézoélectrique. Considérons en effet un cylindre d'épaisseur  $h$  et de diamètre  $d$  constitué de quartz piézoélectrique. Court-circuitons électriquement les deux faces du cylindre et induisons de manière quelconque une onde plane longitudinale se propageant parallèlement à l'axe. Alors, on peut montrer (v. [2]) que le courant de court-circuit est tel que :

$$i(t) = \frac{\pi c_q d^2}{4f} \Delta \sigma(t)$$

où :

$c_q$  est la célérité des ondes élastiques

longitudinales dans le quartz,

$f$  une constante valant  $2,05 \cdot 10^{-12} \text{ C.m}^{-2}.\text{Pa}^{-1}$

$\Delta \sigma(t)$  la différence des contraintes dans le

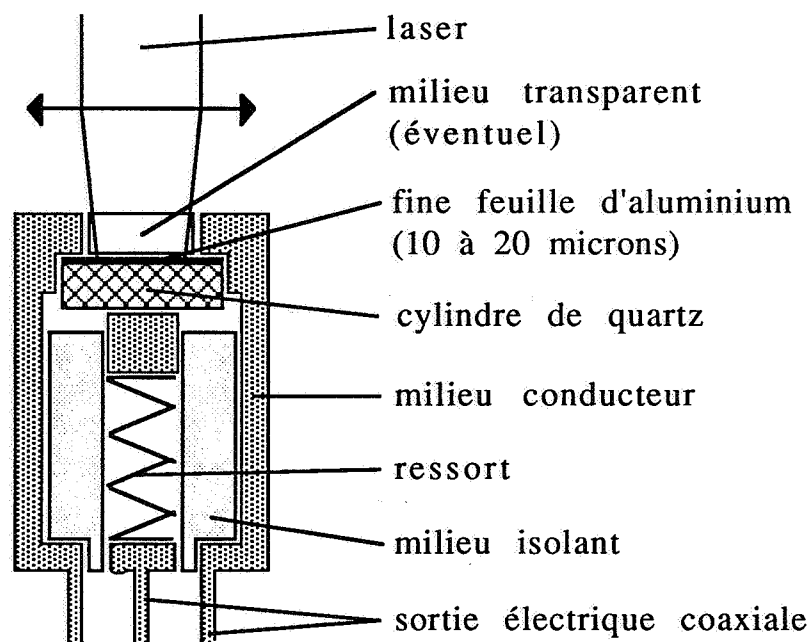
sens de l'axe sur les deux faces du cylindre.

Si l'onde est induite par application d'un signal de pression homogène sur une des faces de cylindre, on pourra la considérer plane à la condition :

$$\frac{d}{l} > 4$$

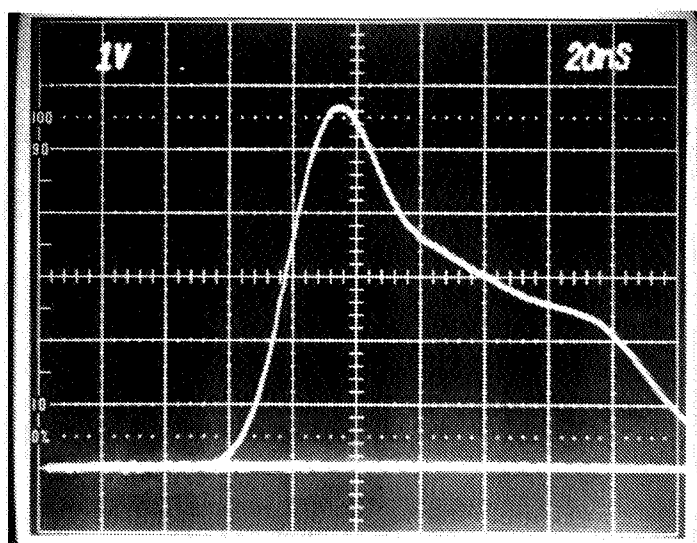


De plus, dans ce cas, le courant de court-circuit sera proportionnel à la contrainte sur la faces dite d'entrée pendant tout le temps de propagation de l'onde à travers le disque. Ces considérations nous ont amenés à la technique de mesure des signaux de pression induits en surface de cible par choc-laser suivante :



L'intérêt de la fine feuille d'aluminium est d'une part de protéger la face d'entrée du quartz du rayonnement laser et d'autre part de recueillir le courant électrique émis par cette face d'entrée. Cette feuille est prise d'épaisseur suffisamment fine pour que le signal de contrainte à la face d'entrée du quartz soit identique au signal de pression du plasma. On voit donc que la mesure de l'évolution dans le temps de l'intensité de court-circuit de la sortie coaxiale permet de déterminer le signal de pression induit à la surface de la cible par choc-laser. Cette mesure peut s'effectuer très facilement à l'aide d'un oscilloscope suffisamment rapide (pouvant résoudre une fraction de nanoseconde).

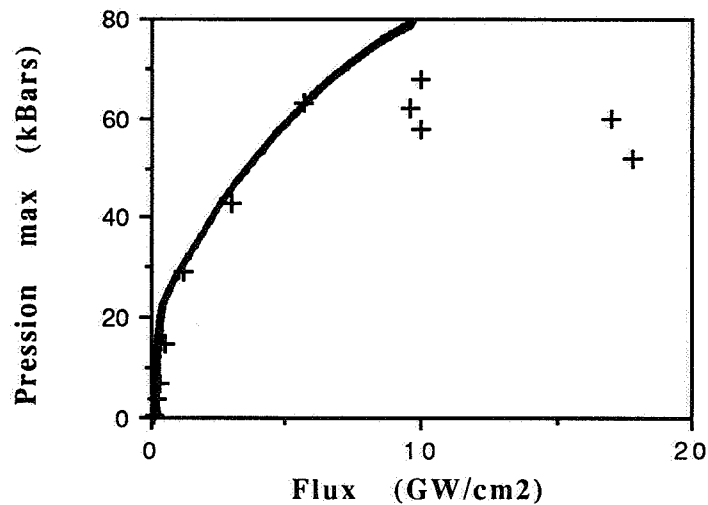
A titre d'illustration, avant de donner la liste détaillée des résultats obtenus, on donne ci-après la forme du signal électrique recueilli pendant l'irradiation à l'aide d'une impulsion laser dont l'intensité est une fonction gaussienne du temps de largeur à mi-hauteur 30 ns et focalisé à 5 GW/cm<sup>2</sup>.



Dans toute la suite de ce chapitre, nous considérerons des impulsions laser gaussiennes en fonction du temps et nous appellerons durée la largeur à mi-hauteur de cette gaussienne.

#### 4.2. Mesure des pressions obtenues par choc-laser de durée 20 ns confiné par verre

Dans un premier temps, nous avons utilisé ce dispositif pour caractériser les signaux de pression obtenus par choc-laser de durée 20 ns confiné par verre. Nous avons donc fait des expériences avec des flux maximum de pulse laser variés. Les résultats d'amplitudes de signaux de pression obtenus ont été consignés dans le graphe suivant :



Les croix représentent les points expérimentaux et la courbe la prédiction du modèle pour :

$$\alpha = 0,25$$

Le modèle est alors en bon accord avec les points expérimentaux tant que le flux ne dépasse pas 10 GW/cm². Au-delà, les phénomènes de claquage dans le milieu confinant apparaissent, entraînant une diminution de l'amplitude du signal de pression.

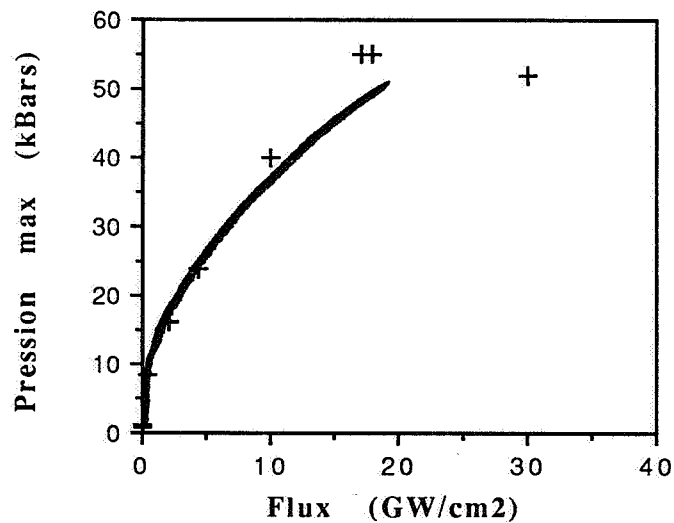
On constate qu'avec une impulsion laser de 20 ns, on peut obtenir à l'optimum une pression de l'ordre de 7000 MPa avec un flux de 10 GW/cm², c'est-à-dire avec le laser que l'on a utilisé, en irradiant une surface de 0,5 cm².

En fin, l'analyse des signaux électriques recueillis montre que l'impulsion de pression a une largeur temporelle à mi-hauteur de :

$$\tau_p = 35 \text{ ns}$$

#### 4.3. Mesure des pressions obtenues par choc-laser de durée 20 ns confiné par eau

Ces expériences ont été reproduites en utilisant comme matériau confinant non plus du verre mais de l'eau.



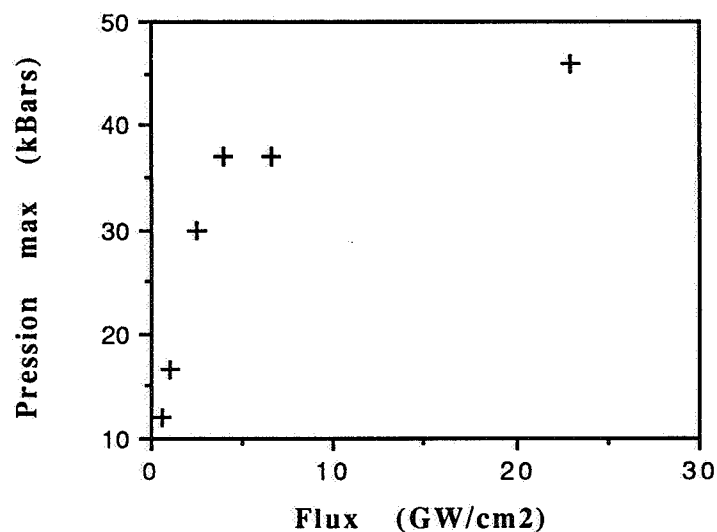
Cette fois-ci, la courbe représentant le modèle a été tracée directement à partir de la valeur de  $\alpha$  déterminée précédemment :

$$\alpha = 0,25$$

On constate que l'accord avec le modèle est excellent. A flux identique, les pressions obtenues en confinement par eau sont inférieures d'un facteur 2 environ aux pressions obtenues en confinement par verre. Néanmoins, le seuil de claquage semble plus élevé, de l'ordre de 20 GW/cm². Ainsi, à l'optimum, avec une impulsion de 20 ns confinée par eau, on peut obtenir une pression de l'ordre de 6000 MPa. Là encore, l'ordre de grandeur de la largeur temporelle de l'impulsion de pression est de 35 ns.

#### 4.4. Mesure des pressions obtenues par choc-laser de durée 20 ns confiné par verre en présence de ruban adhésif noir à l'interface

Nous avons vu plus haut, que pour obtenir une sollicitation purement mécanique de la cible, il est nécessaire de la protéger des effets thermiques par un revêtement d'épaisseur une centaine de micron. Nous allons donc mettre à profit notre montage pour regarder l'effet sur le signal de pression transmis à la cible, de la présence d'un ruban adhésif plastique noir d'épaisseur une centaine de micron sur la surface de la cible. Techniquement, il suffit d'intercaler dans le montage décrit plus haut le ruban entre la feuille d'aluminium et la plaque de verre. Les résultats obtenus sont les suivants :

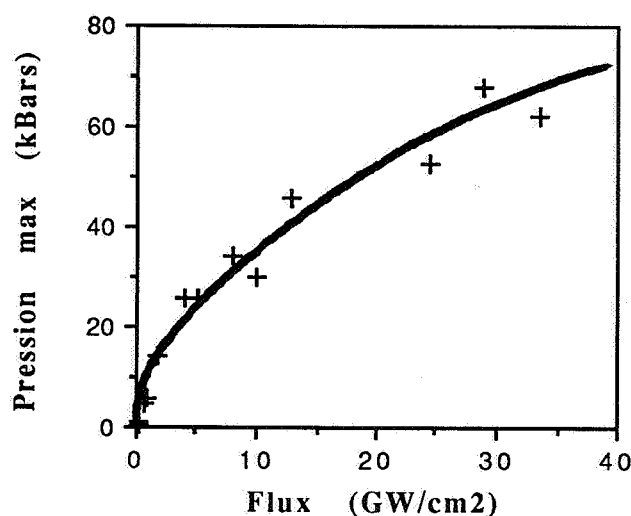


On constate que le ruban produit une petite atténuation du signal de pression qui à l'optimum (10 GW/cm²) n'a plus qu'une amplitude de 5000 MPa au lieu de 7000 MPa. On en déduit, qu'avec de l'eau, à l'optimum (20 GW/cm²) l'amplitude du signal en présence de ruban

sera de 4000 MPa au lieu de 6000 MPa (approximativement).

#### 4.5. Mesure des pressions obtenues par choc-laser de durée 3 ns confiné par eau

Afin de déterminer l'influence du temps d'impulsion laser, nous avons repris ces mesures dans le cas d'une impulsion de 3 ns confinée par eau (il serait maintenant très facile d'en déduire les résultats en confiné par verre). Les résultats sont les suivants :



La courbe représentant le modèle a été obtenue pour :

$$\alpha = 0,25$$

C'est la même valeur que celle obtenue pour les impulsions de 20 ns. La part de l'énergie laser consacrée à l'ionisation du plasma semble donc indépendante du temps d'impulsion. La limite de réponse linéaire du quartz (60 kBars) ne nous a pas permis de déterminer le flux permettant d'obtenir une pression maximale (ce flux est donc supérieur à 40 GW/cm²). La largeur temporelle de l'impulsion de pression est de l'ordre de 10 ns.

## Conclusion

On a montré que le choc-laser en configuration confiné avec revêtement protecteur permet de générer des impacts rapides au sens des chapitres précédents. Nous avons présenté un modèle parfaitement bien corrélé avec les résultats expérimentaux permettant de décrire l'impact ainsi engendré. On a montré que l'amplitude et la durée de cet impact sont donnés par :

$$P = \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y + \sqrt{\left[ \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y \right]^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{\rho \rho_t c_t c_p}{\rho_t c_t + \rho c_p} \alpha \phi}$$

$$\tau_p = \tau \frac{2^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \gamma}{1 + \gamma}$$

où  $\alpha$  seule inconnue de ce modèle a été extrapolée à partir des résultats expérimentaux. Sa valeur est :

$$\alpha = 0,25$$

Ces résultats sont applicables tant que le flux laser est suffisamment petit pour éviter les phénomènes de claquage dans le milieu confinant et que le temps d'impulsion laser est suffisamment grand pour que l'influence de la rugosité des surfaces soit négligeable.

Pour une durée d'impulsion laser de 20 ns, voici les valeurs des pressions maximales atteignables sur :

aluminium confiné par verre : 7000 MPa (à 10 GW/cm<sup>2</sup>)

aluminium confiné par eau : 6000 MPa (à 20 GW/cm<sup>2</sup>)

ruban plastique confiné par verre : 5000 MPa (à 10 GW/cm<sup>2</sup>)

ruban plastique confiné par eau : 4000 MPa (à 20 GW/cm<sup>2</sup>)

## Références

- [1] D. V. Widder, 'The Heat Equation', Academic Press, New York, 1975.
- [2] R.A. Graham & G.E. Ingram, 'Piezoelectric Current from X-Cut Quartz Subjected to Short-Duration Shock-Wave Loading', J. Appl. Phys., Vol. 43, N° 3, March 1972.
- [3] J. Fournier, 'Génération d'Ondes de Choc par Laser Pulsé de Forte Energie. Applications Mécaniques & Métallurgiques', Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique, Juin 89.
- [4] R. Fabbro, J. Fournier, P. Ballard, D. Devaux, J. Virmont, 'Physical Study of Laser produced Plasma in Confined Geometry', J. Appl. Phys., Vol. 68, No 2, July 1990.
- [5] D. Devaux, Thèse de l'Université d'Orsay, à paraître.







## Chapitre 2

# **Confrontation des mesures de contraintes résiduelles induites par choc-laser avec les prédictions théoriques**

## **Introduction**

Dans la partie I, nous avons calculé le champ de contraintes résiduelles induit à la surface d'une cible métallique par ce que nous avons appelé impact rapide. Puis, dans le chapitre précédent, nous avons montré la possibilité de générer de tels impacts rapides avec un laser. Nous appellerons dans toute la suite choc-laser un impact rapide généré par laser. Les choc-laser ont été caractérisés aussi bien en durée qu'en amplitude. Nous sommes donc maintenant à même de prédire les contraintes résiduelles induites par choc-laser dans une cible métallique ainsi que l'épaisseur affectée plastiquement.

A titre d'illustration, on a fait figurer ci-dessous, l'aspect de la surface d'un alliage d'aluminium ayant subi un choc-laser, circulaire pour la première photo et carré pour la seconde. La surface a été protégée des effets thermiques par un revêtement plastique d'une centaine de micron, le cratère visible n'est donc l'effet que d'une sollicitation purement mécanique.



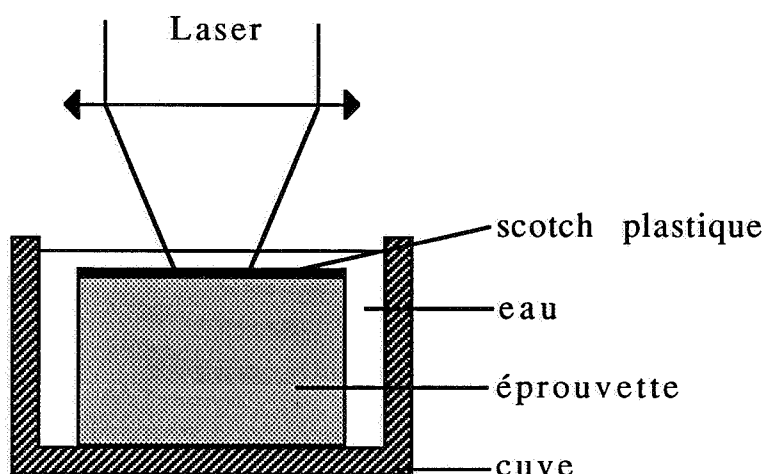
L'objet de ce chapitre est donc l'analyse expérimentale détaillée de tels impacts dans le but de comparer résultats expérimentaux et prédictions théoriques.

## **1. Analyse d'un choc-laser circulaire sur acier**

Dans cette partie, nous allons donner les résultats de l'analyse expérimentale du champ de contrainte résiduelle induit par un choc-laser sur un échantillon d'acier 35CD4 trempé revenu à une dureté de 30 HRC. Toutes les mesures de contrainte présentées ici ont été effectuées par diffraction de rayons X (le principe de cette technique est détaillé en Annexe C).

L'expérience réalisée est la suivante : on a soumis un cylindre d'acier à un choc-laser confiné par eau en le

protégeant des effets thermiques par un ruban adhésif plastique noir.



La géométrie de l'éprouvette est la suivante : il s'agit d'un cylindre de diamètre 30 mm, d'épaisseur 15 mm dont une des faces subit l'impact en son centre. Le diamètre de l'impact est de 8 mm. L'impulsion laser utilisée est temporellement gaussienne de largeur à mi-hauteur 30 ns et son énergie a été évaluée à 150 Joule à l'aide d'un calorimètre.

Nous allons appliquer les résultats du modèle à cette expérience et confronter ces prédictions théoriques aux résultats des mesures expérimentales.

### 1.1 Valeur des paramètres du modèle appliqué à cette expérience

$$\lambda = 1,12 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\mu = 8,14 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_Y = 870 \text{ MPa}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_t = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_t = 1450 \text{ m/s}$$

$$\Phi = 10 \text{ GW/cm}^2$$

## 1.2. Prédictions théoriques

### Vitesse des ondes dans la cible (cf Partie I, Chapitre 2)

On a :

$$c_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}}$$

soit :

$$c_e = 5940 \text{ m/s}$$

$$c_p = 4620 \text{ m/s}$$

### Chargement (cf Partie II, Chapitre 2)

La pression du plasma et sa durée se calculent à l'aide des résultats du chapitre 2.

$$P = \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)}(1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y + \sqrt{\left[\frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)}(1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y\right]^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{\rho \rho_t c_t c_p}{\rho_t c_t + \rho c_p} \alpha \phi}$$

$$\tau = \tau_{\text{laser}} \frac{2^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \gamma}{1 + \gamma}$$

soit :

$$P = 3740 \text{ MPa (37,4 kBar)}$$

$$\tau = 50 \text{ ns}$$

Mais, il faut tenir compte de la présence du scotch, après multiplication par le facteur correctif, on a :

$$P = 2800 \text{ MPa (28 kBar)}$$

$$\tau = 50 \text{ ns}$$

### Déformation plastique (cf Partie I, Chapitre 3)

$\varepsilon^p$  est donné par :

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} \cdot \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right)$$

soit :

$$\varepsilon^p = - 0,416 \%$$

La profondeur affectée plastiquement est donnée par :

$$l = \frac{c_p c_e \tau}{c_e - c_p} E \left( \frac{P + \sigma_Y (1 + \lambda/2\mu)}{4\sigma_Y (1 + \lambda/2\mu) \cdot \frac{c_p}{c_e + c_p}} \right)$$

soit :

$$l = 1 \text{ mm}$$

Le rayon de la zone perturbée est donné par :

$$r = r_0 \cdot \frac{P^2}{\sigma_Y^2} \left[ \frac{\lambda(3\lambda^2 + 6\lambda\mu + 4\mu^2)}{4(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \right]^2$$

soit :

$$r = 1,1 \text{ mm}$$

### Contrainte résiduelle de surface (cf Partie I, Chapitre 4)

La contrainte de surface est donnée par :

$$\sigma_{\text{surf}} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)}{\pi} \frac{1}{r_0 \sqrt{2}} \right]$$

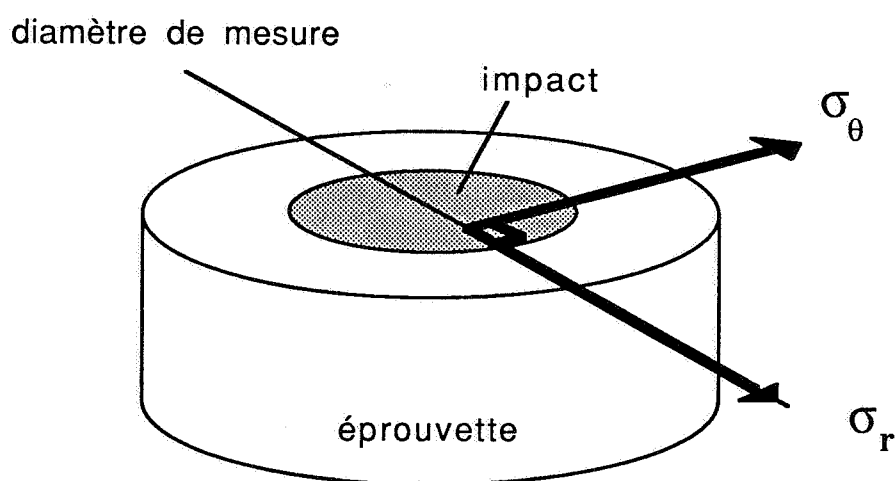
soit :

$$\sigma_{\text{surf}} = - 390 \text{ MPa}$$

### 1.3. Résultats expérimentaux

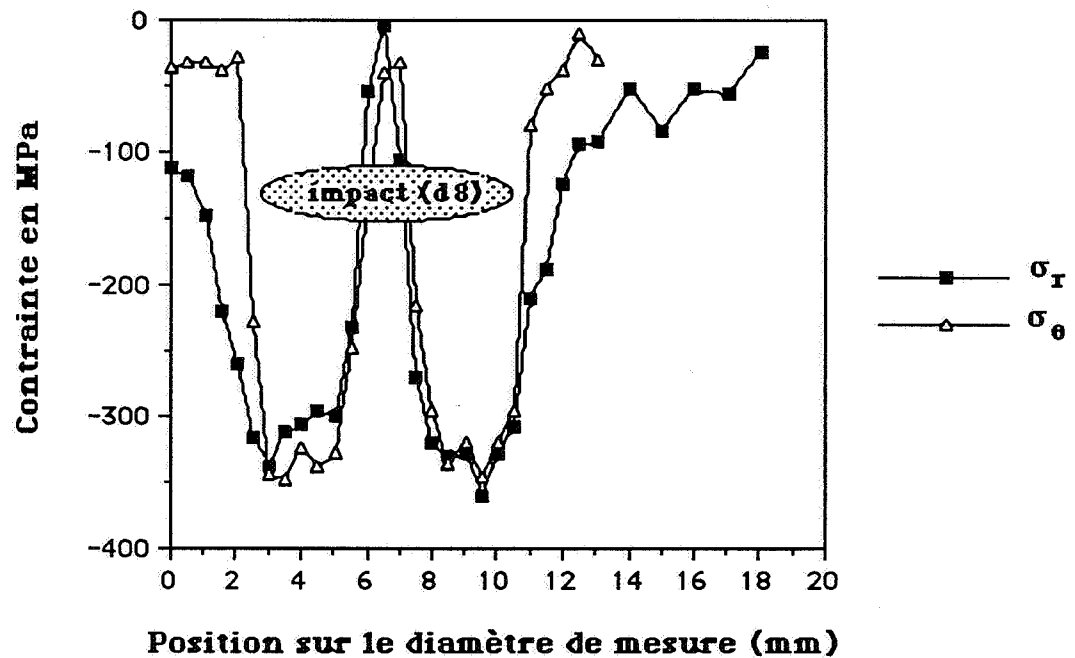
La diffraction de rayons X permet (v. Annexe C) de déterminer expérimentalement les contraintes résiduelles à la surface d'une éprouvette. L'enlèvement de couches par polissage électrolytique permet de plus d'évaluer l'évolution de ces contraintes dans la profondeur. Cette technique a été appliquée à un cylindre impacté par laser dans les conditions décrites ci-dessus.

Les premières mesures effectuées consistent en une 'cartographie' des contraintes selon un diamètre d'impact.



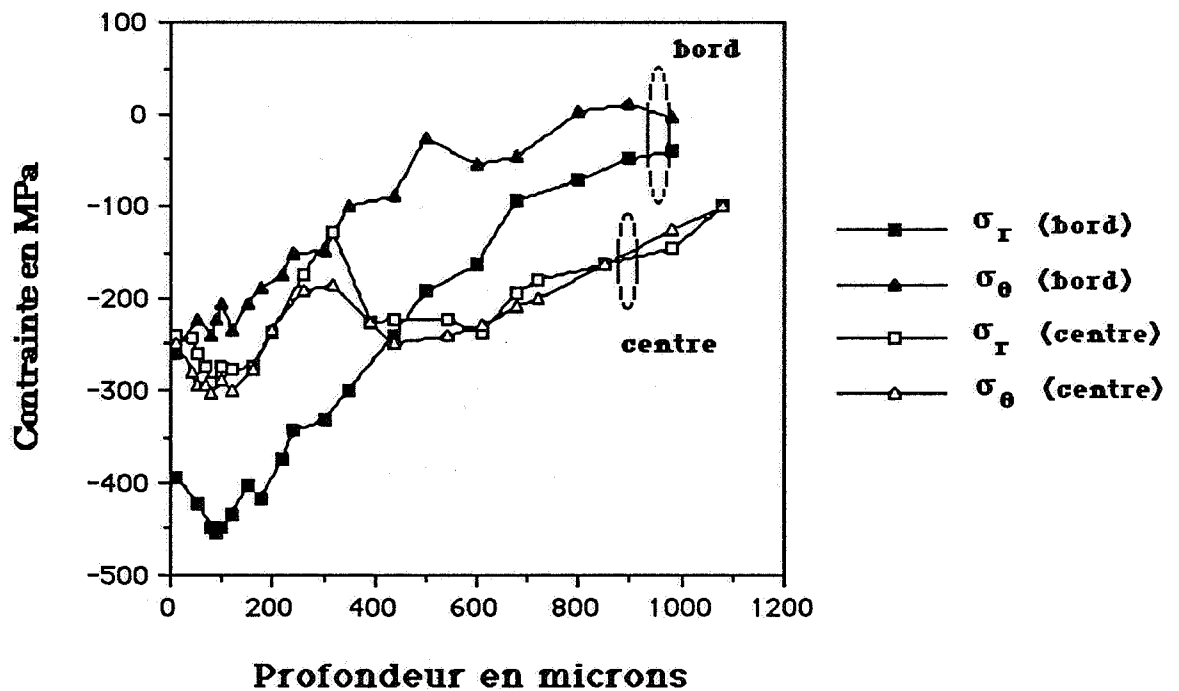
On note  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  les contraintes radiales et orthoradiales sur le diamètre de mesure. Les résultats des mesures sont les suivants :





On note sur ces résultats la présence de contraintes résiduelles de compression sur tout l'impact avec un 'trou' au centre correspondant à la zone perturbée par l'onde radiale. Le rayon de ce trou est d'environ 1 mm (la prédiction théorique donnait 1,1 mm). Hors de ce trou, la contrainte est homogène et vaut environ -350 MPa (la prédiction théorique donnait -380 MPa).

Nous allons maintenant regarder l'évolution de ces contraintes dans la profondeur. L'évolution de la contrainte dans la profondeur au bord de l'impact (zone non perturbée par les ondes radiales) a été regardée à l'abscisse 3 mm sur le diamètre de mesure. La contrainte au centre (zone perturbée a été regardée à l'abscisse 6,5 mm sur le diamètre de mesure. Les résultats sont les suivants :



On s'aperçoit au vu de ces résultats que la profondeur affectée plastiquement est bien de l'ordre de 1 mm comme le prévoit la modélisation.

## 2. Analyse d'un choc-laser carré sur acier

La même expérience a été réalisée sur un acier 35CD4 trempé revenu à une dureté de 50 HRC dans le cas d'un impact carré de côté  $a = 5$  mm confiné par de l'eau. La surface de la cible a été protégée par un revêtement plastique noir d'épaisseur une centaine de microns.

### 2.1. Valeur des paramètres du modèle appliqué à cette expérience

$$\lambda = 1,12 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\mu = 8,14 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_Y = 1250 \text{ MPa}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_t = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_t = 1450 \text{ m/s}$$

$$\Phi = 8 \text{ GW/cm}^2$$

## 2.2. Prédictions théoriques

### Vitesse des ondes dans la cible (cf Partie I, Chapitre 2)

On a :

$$c_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}}$$

soit :

$$c_e = 5940 \text{ m/s}$$

$$c_p = 4620 \text{ m/s}$$

### Chargement (cf Partie II, Chapitre 2)

La pression du plasma et sa durée se calculent à l'aide des résultats du chapitre 2.

$$P = \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y + \sqrt{\left[ \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y \right]^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{\rho \rho_t c_t c_p}{\rho_t c_t + \rho c_p} \alpha \phi}$$

$$\tau = \tau_{\text{laser}} \frac{2^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \gamma}{1 + \gamma}$$

soit :

$$P = 3500 \text{ MPa (35 kBar)}$$

$$\tau = 50 \text{ ns}$$

Mais, il faut tenir compte de la présence du scotch, après multiplication par le facteur correctif, on a :

$$P = 2800 \text{ MPa (28 kBar)}$$

$$\tau = 50 \text{ ns}$$

### Déformation plastique (cf Partie I, Chapitre 3)

$\epsilon^p$  est donné par :

$$\epsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} \cdot \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1 \right)$$

soit :

$$\epsilon^p = 0,3 \%$$

La profondeur affectée plastiquement est donnée par :

$$l = \frac{c_p c_e \tau}{c_e - c_p} E \left( \frac{P + \sigma_Y (1 + \lambda/2\mu)}{4\sigma_Y (1 + \lambda/2\mu) \cdot \frac{c_p}{c_e + c_p}} \right)$$

soit :

$$l = 0,6 \text{ mm}$$

Il n'y a pas de perturbation du champ de déformation plastique par les détente radiales.

### Contrainte résiduelle de surface (cf Partie I, Chapitre 4)

La contrainte de surface est donnée par :

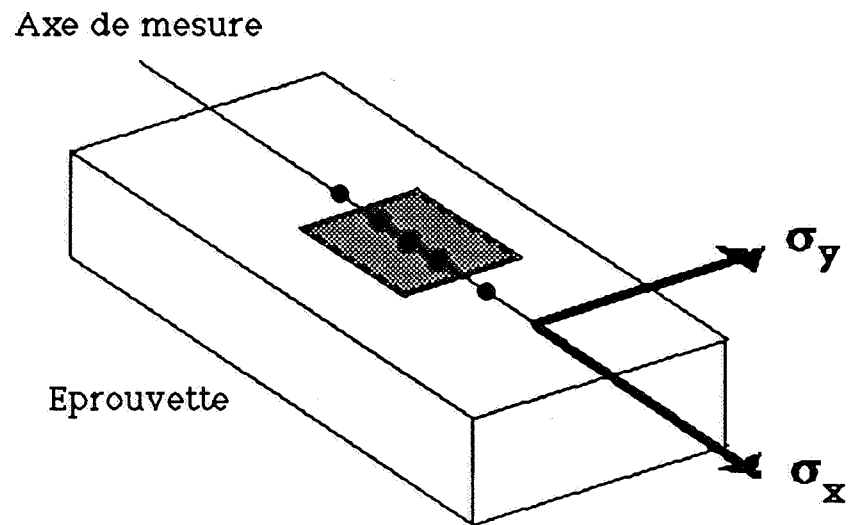
$$\sigma_{\text{surf}} = \mu \epsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)l}{\pi a} \right]$$

soit :

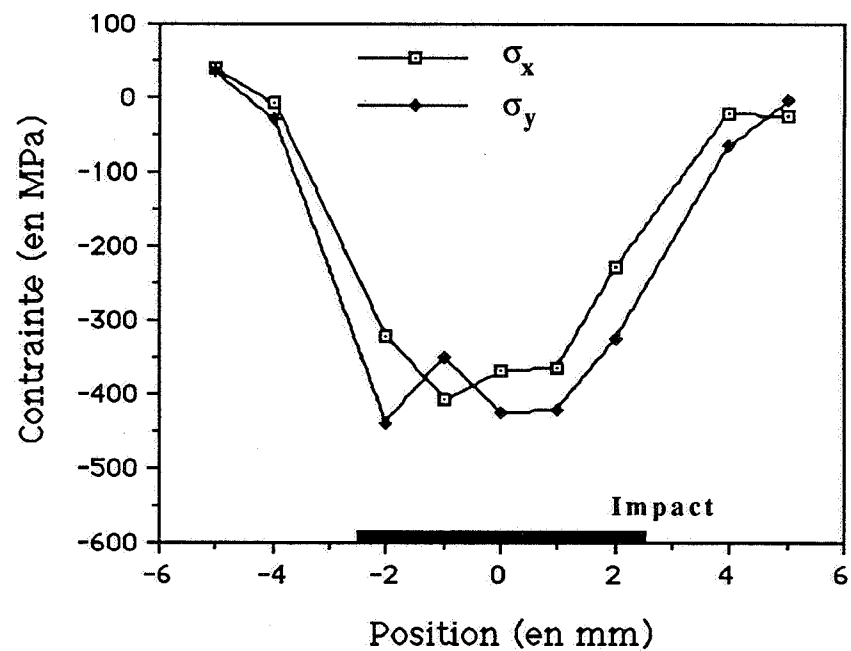
$$\sigma_{\text{surf}} = -350 \text{ MPa}$$

## 2.3. Résultats expérimentaux

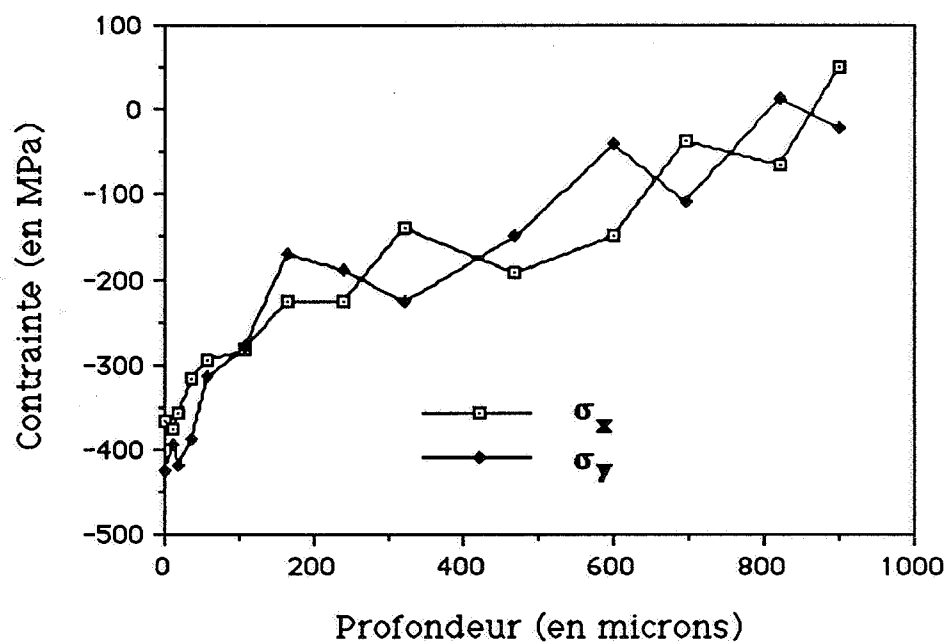
De la même manière que précédemment, on a réalisé des mesures de contrainte selon un axe du carré :



Les résultats sont les suivants :



On constate sur ces résultats que, cette fois-ci, la contrainte est bien homogène dans l'impact. La valeur expérimentale est 400 MPa contre 350 MPa pour la prédiction théorique. L'évolution de ces contrainte dans la profondeur de l'éprouvette est la suivante :



La prédiction théorique de la profondeur affectée plastiquement (0,6 mm) est donc bien vérifiée expérimentalement.

Le modèle permet donc de calculer l'effet d'un impact carré avec une très bonne précision.

### 3. Analyse d'impacts superposés

On reprend l'expérience décrite dans le §1. On fait subir un choc-laser circulaire à un cylindre constitué de 35CD4 trempé revenu à 50 HRC. Sur une autre éprouvette, on réalise trois impacts dans les mêmes conditions (l'intervalle entre chaque impact est largement supérieur à la seconde). Enfin, sur une troisième éprouvette, on applique six impacts successifs. Chacun des impacts réalisés est obtenu à l'aide d'une impulsion laser gaussienne de 30 ns de largeur à mi-hauteur, contenant une énergie de 150 J et focalisée sur une tâche de 8 mm de diamètre. On utilise un ruban adhésif plastique protecteur et l'eau comme précédemment pour confiner le plasma.

### 3.1. Valeur des paramètres du modèle appliqué à cette expérience

$$\lambda = 1,12.10^5 \text{ MPa}$$

$$\mu = 8,14.10^4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_Y = 1250 \text{ MPa}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_t = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_t = 1450 \text{ m/s}$$

$$\Phi = 10 \text{ GW/cm}^2$$

### 3.2. Prédictions théoriques

Les résultats de la partie I peuvent s'appliquer de la même manière à ces expériences. Les résultats sont les suivants pour l'éprouvette n'ayant subi qu'un seul impact :

- contrainte de surface dans la zone périphérique de l'impact (non perturbée par les détentés radiales) :

$$\sigma_{\text{surf}} = - 530 \text{ MPa}$$

- profondeur affectée plastiquement :

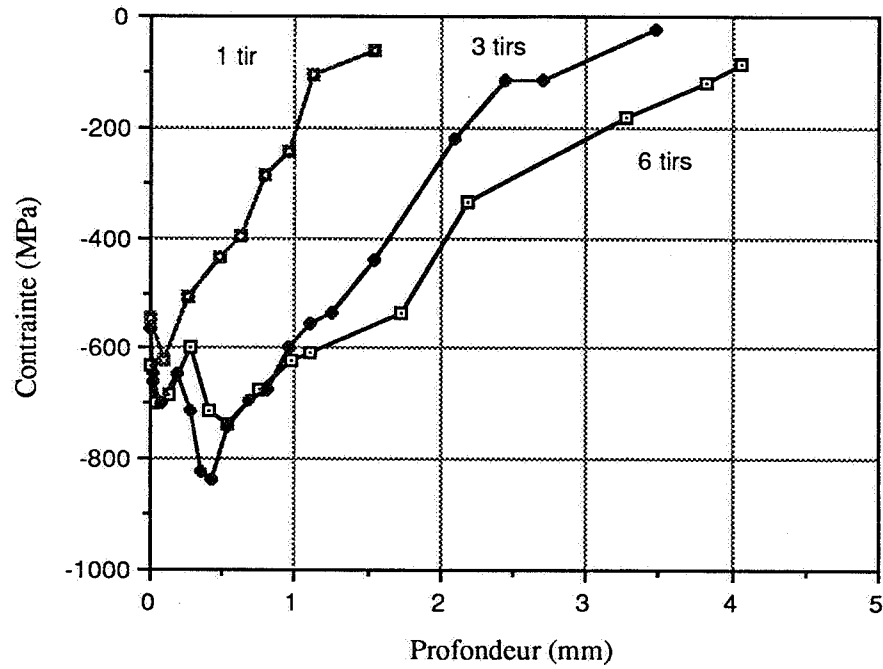
$$l = 1 \text{ mm}$$

L'analyse de la partie I nous permet également d'annoncer que dans le cas des trois impacts, la contrainte de surface sera la même (630 MPa) alors que la profondeur affectée sera multipliée par trois (3 mm).

Pour ce qui est des six impacts, l'analyse de la partie I ne s'applique plus puisqu'elle conduirait à une profondeur affectée qui ne serait plus petite devant le diamètre de l'impact (6 mm devant 8 mm).

### 3.3. Résultats expérimentaux

Les résultats de l'expérience obtenus par J. Fournier dans [1] sont les suivants :



Là encore, on constate que l'accord entre le modèle et l'expérience est très bon bien que la contrainte de surface ait été ici légèrement sous-évaluée.



## Conclusion

On a montré en analysant expérimentalement de manière détaillée deux impacts de formes différentes sur des nuances d'acier différente un excellent accord entre les prévisions du modèle et les résultats de l'expérience. Cette démonstration nous autorise donc une bonne confiance envers le modèle tout au moins en ce qui concerne les aciers.

On a également montrer qu'en utilisant des impacts carré juxtaposés ou des impacts circulaires décalés, on peut réaliser une bande homogène de traitement et contourner ainsi les effets des détente latérales.

## Références

- [1] J. Fournier, 'Génération d'Ondes de Choc par Laser Pulsé de Forte Energie. Applications Mécaniques & Métallurgiques', Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique, Juin 89.







### Chapitre 3

## **Application à l'amélioration de la tenue en fatigue des pièces métalliques traitées par choc-laser**

### **Introduction**

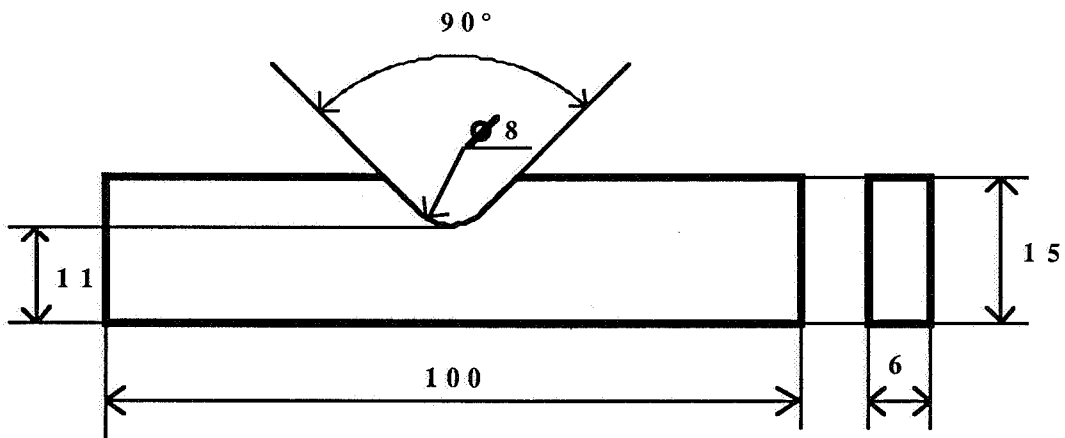
L'ensemble des chapitres précédents permet de comprendre phénoménologiquement et quantitativement l'effet d'un choc-laser sur une cible métallique. Cette analyse permet notamment de prédire à partir des caractéristiques du matériau et de l'impulsion laser incidente le champ de contrainte résiduelle induit. On a ainsi montré que le choc-laser permet d'induire des contraintes résiduelles de compression sur une partie quelconque de la surface d'une pièce métallique. L'épaisseur contrainte peut être supérieure au millimètre. Sachant que d'une manière générale, les contraintes résiduelles de compression sont favorables à la tenue des pièces mécaniques sollicitées à l'endurance, on voit qu'il se profile ici un nouveau procédé de renforcement local de surfaces sollicitées en endurance. Le but de cette partie n'est pas de détailler toutes les applications possibles, mais de montrer sur un exemple l'efficacité d'un tel renforcement et de comparer le gain obtenu avec celui que l'on obtiendrait par un procédé classique comparable : le grenaillage.

## 1. Description de l'essai

Nous cherchons, rappelons-le, à valider le procédé de choc-laser en tant que traitement de surface pour renforcer localement les pièces mécaniques sollicitées à l'endurance. L'essai retenu est un essai de flexion plane trois points ondulée sur éprouvette entaillée.

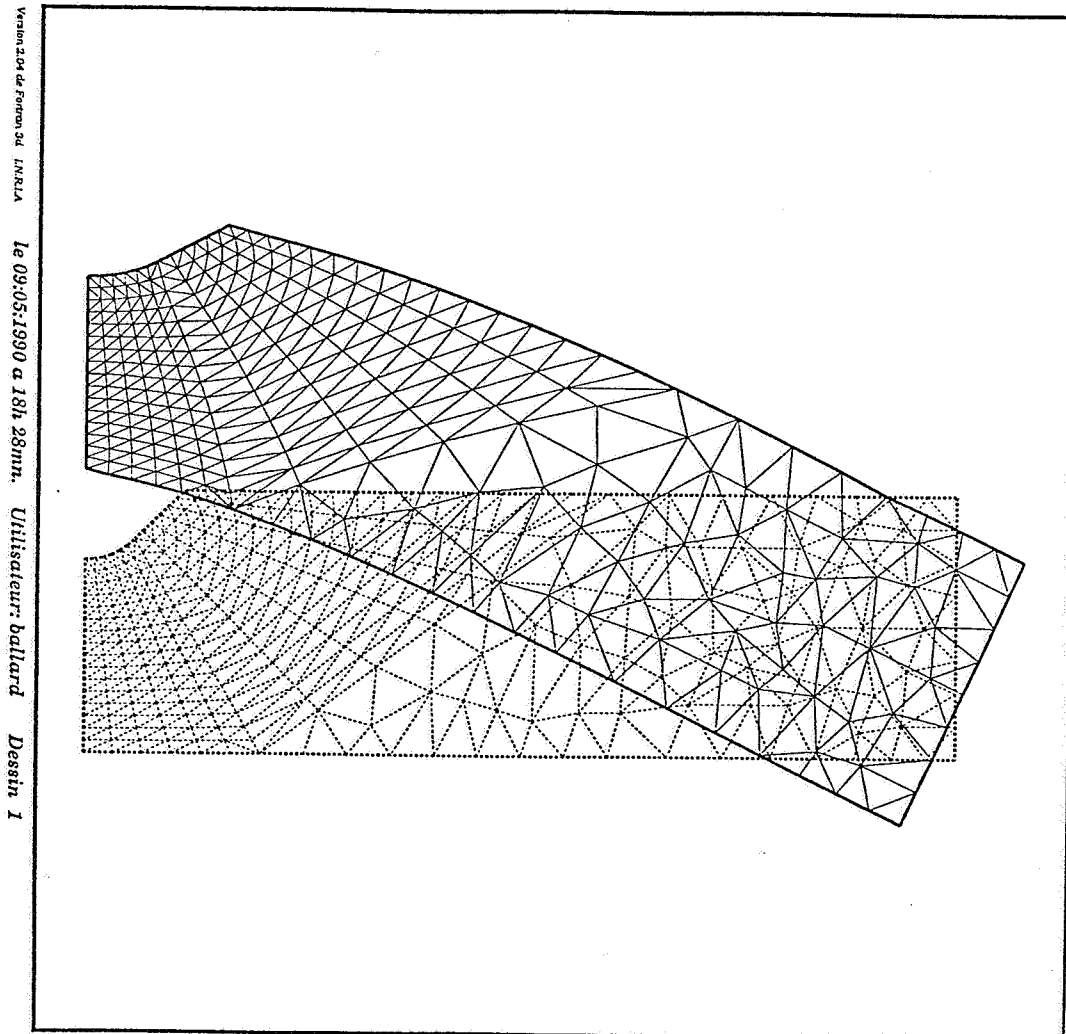
### 1.1. Géométrie

La géométrie de l'éprouvette est la suivante :



L'intérêt de l'éprouvette entaillée est que lorsque l'on applique un moment de flexion, la concentration de contrainte au voisinage de l'entaille localise la partie de la surface sollicitée. La surface à traiter par choc-laser reste donc limitée. On appelle  $K_t$  le facteur de concentration de contrainte c'est-à-dire le rapport entre la contrainte en fond d'entaille (supposée élastique) lorsque l'on applique un moment de flexion et la contrainte qui existerait sur un parallélépipède de dimension 100 x 11 x 6 et auquel on aurait appliqué le même moment de flexion. Cette dernière contrainte (fictive) est appelée contrainte nominale. Ce facteur de concentration de contrainte peut être évalué simplement à l'aide d'un calcul numérique

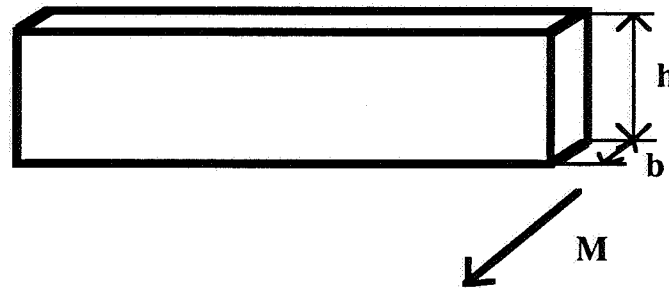
par éléments finis. L'éprouvette étant d'épaisseur faible, on fait l'hypothèse que le champ de contrainte dans l'éprouvette est plan. Un simple calcul par éléments finis en contrainte plane permet donc d'évaluer la contrainte en fond d'entaille résultant de l'application d'un moment de flexion. A titre d'illustration, nous représentons ci-après la déformée du maillage après application du chargement.



Le calcul de la contrainte nominale obtenue après application d'un moment de flexion  $M$  se fait en utilisant les résultats de calcul des poutres. La contrainte dans le sens long  $\sigma_{\text{nom}}$  vaut :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{6M}{bh^2}$$

avec :



Le rapport entre contrainte réelle (calculée par éléments finis) et contrainte nominale obtenues pour la même valeur du moment de flexion permet alors de calculer le facteur de concentration de contrainte. Dans le cas de l'éprouvette retenue, on a :

$$K_t = 1,56$$

Ajoutons que la rectification finale de l'entaille des éprouvettes a été faite dans le sens longitudinal et que les arrêtes vives au bord de l'entaille ont été polies manuellement.

### 1.2. Sollicitation

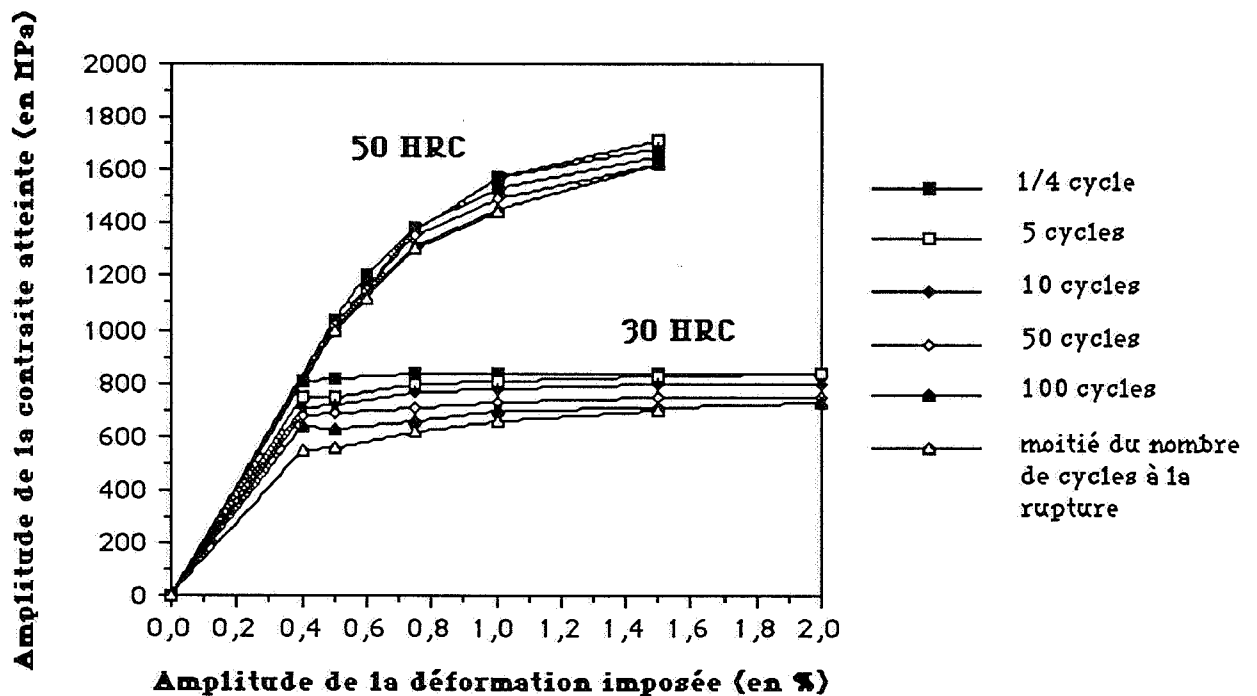
Il s'agit d'un moment de flexion plane variant sinusoïdalement en fonction du temps. Cette sinusoïde est décalée selon l'axe des ordonnées de telle sorte que le signe du moment de flexion soit constant au cours du temps (essai de fatigue ondulé). Ce signe est fixé de sorte que la contrainte longitudinale appliquée au fond de l'entaille soit positive. Le rapport entre les contraintes nominales appliquées minimales et maximales est choisi égal à 0,1.

### 1.3. Matériau

Les matériaux retenus sont les aciers 35CD4 30 HRC et 35CD4 50 HRC. Il s'agit d'un acier trempé revenu à deux duretés différentes. Les limites d'élasticité en traction simple sont respectivement 870 et 1250 MPa. Cependant, ces limites



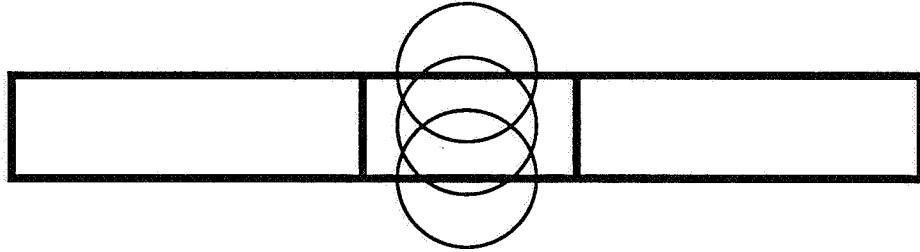
d'élasticité peuvent évoluer au cours de l'application de sollicitations cycliques. Pour caractériser ces évolutions, nous avons déterminé expérimentalement les courbes dites d'écrouissage cyclique de nos matériaux. Le principe d'obtention de ces courbes est simple. On impose par traction simple un allongement fonction sinusoïdale du temps à une éprouvette de manière à atteindre le domaine plastique et l'on conserve l'évolution de la contrainte maximale obtenue en un cycle en fonction du nombre de cycle appliqué. On répète ensuite cet essai pour différentes valeurs de la déformation maximale imposée. Dans le cas de nos deux aciers, nous avons obtenus les résultats suivants :



On constate ainsi que la limite d'élasticité du 35CD4 50 HRC n'évolue pour ainsi dire pas au cours de la sollicitation cyclique alors que celle du 35CD4 30 HRC baisse significativement : on dit que le matériau s'adoucit.

#### 1.4. Traitement

L'entaille de l'éprouvette a été traitée à l'aide de trois impacts laser décalés de la manière suivante ( vue de dessus de l'éprouvette) :



Les impacts ont été réalisés avec des impulsions laser de 30 ns focalisées au flux de 15 GW/cm<sup>2</sup>. L'éprouvette avait été protégée des effets thermiques par un ruban adhésif plastique noir et la cible recouverte d'eau. Les contraintes résiduelles dans le sens long de l'éprouvette (direction de sollicitation) mesurée par diffraction de rayons X sont :

35CD4 30 HRC : - 450 MPa

35CD4 50 HRC : - 550 MPa

#### 1.5. Principe de l'essai

L'essai de fatigue réalisé est un essai d'endurance à 10<sup>7</sup> cycles par la méthode dite de l'escalier (ou staircase). Pour une série d'éprouvettes identiques donnée, l'essai est le suivant : on fixe une durée maximale d'essai (ici 10<sup>7</sup> cycles), un échelonnement de l'amplitude la sollicitation appliqué de pas constant d'ordre de grandeur de l'écart-type attendu de la courbe de réponse (ici 20 MPa en contrainte nominale). On se donne ensuite une estimation à priori de la limite d'endurance et l'on effectue le premier essai à ce niveau. Pour déterminer le niveau de sollicitation des essais suivants, on applique l'algorithme ci-dessous :

- Si l'essai précédent s'est traduit par une non-rupture, choisir, pour le nouvel essai à effectuer, le palier de

contrainte de l'échelonnement adopté immédiatement supérieur à celui utilisé lors du dernier essai.

- Si l'essai précédent s'est traduit par une rupture, choisir, à l'inverse, le palier immédiatement inférieur.

Les essais se poursuivent alors selon cette règle, les uns à la suite des autres, jusqu'à épuisement des  $n$  éprouvettes que l'on a décidé d'y consacrer. L'utilisation des résultats se fait alors de la manière suivante : on détermine d'abord le type d'évènement qui s'est produit le moins souvent au cours de la série d'essais : rupture ou non-rupture. Les résultats de ce type suffisent, en effet, au calcul et sont retenus de préférence aux autres, le fait que les résultats d'un type donné (les ruptures, par exemple) soient plus nombreux que les autres étant souvent dû au choix d'un niveau de départ éloigné de la valeur à estimer. La séquence débute alors par une suite de résultats du même type dont la prise en compte entraînerait une erreur dans l'évaluation statistique de la limite d'endurance. Pour faire cette évaluation, on compte ensuite le nombre  $N_i$  des réalisations de cet évènement (rupture ou non-rupture) à chaque niveau d'essai (en terme de niveau dans l'échelonnement de l'amplitude de contrainte appliquée). Puis, on numérote ces niveaux en attribuant la valeur  $i=0$  au plus faible de ceux auxquels il a été observé au moins une fois.  $i$  désignant le numéro du niveau d'essai, l'estimation statistique de la limite d'endurance est donnée par :

$$\sigma_D = \sigma_0 + d \left( \frac{\sum i N_i}{\sum N_i} \pm \frac{1}{2} \right)$$

où :

$\sigma_0$  est le niveau d'indice 0 tel que défini plus haut (le plus faible des niveaux utilisés auxquels on ait obtenu au moins un résultat du type retenu).

$d$  est l'espacement des niveaux.

## 2. Résultats de l'essai

Cet essai a été donc effectué sur une série de 12 éprouvettes en 35CD4 30 HRC traitées par choc-laser et sur une série de 12 en 35CD4 50 HRC également traitées par choc-laser. A titre comparatif, ces essais ont également été faits sur des séries de 12 éprouvettes des deux matériaux sans traitement et sur des séries de 12 ayant subies un traitement de grenaillage (shot-peening). Ces essais ont été menés par P. Merrien à l'IRSID (Institut de Recherche de la Sidérurgie). Les résultats sont les suivants (toutes les contraintes figurant dans cette partie sont des contraintes nominales maximales) :

### 2.1. 35CD4 30 HRC sans traitement

$\sigma$ (Mpa)	n° essai											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
750	R											
730		R										
710			R			R		R				
690					NR		NR					
670				NR								

La limite d'endurance (exprimée en contrainte nominale maximale) peut donc être estimée à :

$$\sigma_D = 680 \text{ MPa}$$

### 2.2. 35CD4 50 HRC sans traitement

$\sigma$ (Mpa)	n° essai											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
700	R				R							
680		R		NR		R				R		NR
660			NR				R		NR		NR	
640								R				

La limite d'endurance (exprimée en contrainte nominale maximale) peut donc être estimée à :

$$\sigma_D = 680 \text{ MPa}$$

### 2.3. 35CD4 30 HRC grenailé

$\sigma$ (Mpa)	n° essai											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
720	R											
710			R									
700				R					R			
690		NR			R			NR				
680							NR					
670						NR						

La limite d'endurance (exprimée en contrainte nominale maximale) peut donc être estimée à :

$$\sigma_D = 685 \text{ MPa}$$

### 2.4. 35CD4 50 HRC grenailé

$\sigma$ (Mpa)	n° essai											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
750	R				R							
730				NR		R						
710			NR				R					
690		NR										

La limite d'endurance (exprimée en contrainte nominale maximale) peut donc être estimée à :

$$\sigma_D = 720 \text{ MPa}$$

## 2.5. 35CD4 30 HRC traité par choc-laser

$\sigma$ (Mpa)	n° essai											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
830											R	
810							R			R		
790					R	NR			NR			
770				R								
750	R		NR									
730		NR						NR				

La limite d'endurance (exprimée en contrainte nominale maximale) peut donc être estimée à :

$$\sigma_D = 770 \text{ MPa}$$

## 2.6. 35CD4 50 HRC traité par choc-laser

$\sigma$ (Mpa)	n° essai											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1100						R						
1000					NR		R					
940				NR				NR				
920			NR						R			
900		NR									R	
880	NR									NR		

La limite d'endurance (exprimée en contrainte nominale maximale) peut donc être estimée à :

$$\sigma_D = 900 \text{ MPa}$$

## 2.7. Récapitulatifs des résultats obtenus

### 35CD4 30 HRC

	$\sigma_{rés}$	$\sigma_D$
Métal de base		680 MPa
Métal grenailé	- 550 MPa	685 MPa
Métal traité par choc-laser	- 450 MPa	770 MPa

### 35CD4 50 HRC

	$\sigma_{rés}$	$\sigma_D$
Métal de base		680 MPa
Métal grenailé	- 650 MPa	720 MPa
Métal traité par choc-laser	- 550 MPa	900 MPa

## 3. Discussion

Avant de commencer la discussion, on peut déjà mentionner un fait important : sur presque la totalité des éprouvettes rompues, les fissures de fatigue se sont amorcées en surface et sur la totalité des éprouvettes rompues, les fissures se sont amorcées à moins de 100  $\mu\text{m}$  de la surface. On peut donc considérer que dans l'essai présenté ci-dessus, les problèmes de fatigue sont localisés en surface. On peut remarquer également que dans cinq des six essais présentés dans la partie précédente, la contrainte locale en cours d'essai à la surface au fond de l'entaille reste inférieure à la limite d'élasticité cyclique du matériau. Il n'y a apparition de plasticité macroscopique que dans le cas de l'essai sur le

35CD4 30 HRC sans traitement. Dans ce cas, des déformations plastiques macroscopiques sont apparues dans le matériau lors de l'application des quelques premiers cycles avant que l'on atteigne un état adapté. Cette observation implique que cet essai est difficilement comparable aux autres.

Nous allons donc concentrer l'analyse sur les résultats des trois essais effectués sur la nuance 35CD4 50 HRC. Pour l'analyse de ces résultats, nous allons négliger la composante transversale du tenseur des contraintes en fond d'entaille devant la composante longitudinale. Il s'agit alors d'un problème de fatigue uniaxial. La limite d'endurance du métal de base (en contrainte nominale) a été évaluée à :

$$\sigma_D = 680 \text{ MPa}$$

La présence des contraintes résiduelles induites par choc-laser étant de l'ordre de 550 MPa, et la sollicitation de signe constant, la nouvelle limite d'endurance du métal traité par choc-laser devrait être :

$$\sigma_D = 680 + \frac{550}{1,56}$$

$$\sigma_D = 1000 \text{ MPa}$$

La différence avec la valeur mesurée 900 MPa est tout à fait compatible avec les incertitudes existant sur toutes les valeurs mesurées. L'augmentation de limite d'endurance apportée par choc-laser est donc totalement explicable par le champ de contrainte résiduel induit. Il n'en est pas de même en ce qui concerne le métal grenailé. En effet, les contraintes résiduelles de grenaillage plus élevées que celles dûes au choc-laser devraient conduire à une plus grande augmentation de la limite d'endurance du métal de base. Ce n'est pas le cas. L'explication en est vraisemblablement la suivante : l'application d'un impact laser (application d'une pression hydrodynamique à la surface) ne perturbe pas l'état de surface. En effet, après choc-laser, on distingue encore parfaitement les stries de rectification à la surface de l'éprouvette impactée. Il n'en est pas de même du grenaillage



pour lequel chaque impact de bille crée un petit cratère. Chacun de ces cratère crée ensuite une microconcentration de contrainte lors de l'application de la sollicitation. Si les deux essais d'endurance métal de base et métal traité par choc-laser sont donc très facilement comparable puisque seul l'état de contrainte résiduelle a changé, il n'en est pas de même du métal grenailé où l'état de surface a été perturbé. La conséquence en est que l'amélioration de la tenue en endurance n'en pas aussi élevée que ce que l'on aurait pu penser à la seule vue des contraintes résiduelles induites. Cette interprétation peut être étayée par des résultats de mesure de rugosité en fond d'entaille sur le métal de base, le métal grenailé et le métal traité par choc-laser. Ces mesures ont été effectuées dans le sens travers de l'entaille, c'est-à-dire, perpendiculairement au sens de rectification. On appelle  $R_A$  la rugosité moyenne et  $R_T$  l'amplitude de la rugosité. Les résultats sont les suivants :

#### 35CD4 30 HRC

	$R_A$	$R_T$
Métal de base	1,02 $\mu\text{m}$	8,85 $\mu\text{m}$
Métal grenailé	3,33 $\mu\text{m}$	19,8 $\mu\text{m}$
Métal traité par choc-laser	1,32 $\mu\text{m}$	10,73 $\mu\text{m}$

#### 35CD4 50 HRC

	$R_A$	$R_T$
Métal de base	1,56 $\mu\text{m}$	11,4 $\mu\text{m}$
Métal grenailé	3,14 $\mu\text{m}$	17,7 $\mu\text{m}$
Métal traité par choc-laser	1,35 $\mu\text{m}$	9,35 $\mu\text{m}$

On constate au vu de ces résultats que, grosso modo, l'amplitude de rugosité n'est pas affectée par le choc-laser alors que sur ces nuances d'acier, elle est doublée par le traitement de grenaillage. Ces résultats viennent donc bien étayer l'interprétation formulée a priori de la différence 'd'efficacité' en fatigue des traitements de grenaillage et de choc-laser.

## Conclusion

On a donc bien démontré en détaillant les résultats d'un essai de fatigue à l'endurance comparatif, l'efficacité du choc-laser en tant que traitement de surface localisé visant à améliorer la tenue en endurance des structures métalliques. Dans le cadre de l'essai présenté (en terme de matériau, sollicitation, etc...), le choc-laser s'est révélé nettement supérieur au grenaillage, traitement industriel classique et comparable. La raison semble en être le fait que le choc-laser préserve totalement l'état de surface avant traitement, ce qui n'est pas le cas du grenaillage.

## Références

- [1] H.-P. Lieurade, "La Pratique des Essais de Fatigue", Pyc Edition, Paris, 1982.





## Conclusion générale

# Le Choc-Laser

Pour conclure ce travail, nous allons rappeler les principaux résultats obtenus concernant le choc-laser et détailler les implications qui en découlent pour le choc-laser en tant que traitement de surface industriel.

## 1. Principaux résultats théoriques

On a montré que dans le cas d'un choc-laser en configuration confinée pour des temps d'impulsion laser variant de 3 à 50 nanosecondes, le comportement supposé élasto-parfaitement plastique de la cible rend bien compte de sa réponse (quelle que soit l'intensité de l'impulsion laser). Les effets de la visco-plasticité et de l'écrouissage cinématique sont négligeables. La pression atteinte en surface de cible est donnée par :

$$P = \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y + \sqrt{\left[ \frac{(c_e - c_p)\rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu)\sigma_Y \right]^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{\rho \rho_t c_t c_p}{\rho_t c_t + \rho c_p} \alpha \phi}$$

L'épaisseur affectée plastiquement vaut :

$$l = \frac{c_p c_e \tau}{c_e - c_p} E \left( \frac{P + \sigma_Y (1 + \lambda/2\mu)}{4\sigma_Y (1 + \lambda/2\mu) \frac{c_p}{c_e + c_p}} \right)$$

Le champ de déformation plastique induit est de la forme :

$$\underline{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix}$$

avec, en surface :

$$\varepsilon^p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y}{\lambda+2\mu/3} \cdot f\left(\frac{P}{(1+\lambda/2\mu) \cdot \sigma_Y} - 1\right)$$

où  $f$  est la fonction continue nulle pour les réels négatifs, égale à 1 pour les réels supérieur à 1 et linéaire entre 0 et 1.

Ce champ est perturbé au centre par les détente latérales dans le cas de l'impact circulaire et ne l'est pas dans le cas de l'impact carré à condition que la pression (ou l'intensité de l'impulsion laser) ne soit pas trop élevée.

La contrainte résiduelle en surface vaut alors :

$$\sigma_{\text{surf}} = \mu \varepsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)}{\pi} \frac{1}{a} \right]$$

## 2. Application au choc-laser en tant que traitement de surface industriel

Il a été montré sur un essai de fatigue que le choc-laser constitue un traitement de surface très efficace pour améliorer la tenue en endurance des pièces mécaniques. Nous allons énoncé ici les implications de notre travail sur l'optimisation de l'utilisation du choc-laser en tant que traitement de surface. Nous supposons que l'effet recherché est la maximisation de la contrainte de surface.

## 2.1. Maîtrise de l'interaction laser-matière

Il faut protéger la surface du matériau des effets thermiques par un revêtement protecteur. Une couche de peinture d'épaisseur 20 à 30 microns semble préserver la surface en ne provoquant à priori aucune atténuation du signal de pression. Il est nécessaire de déposer un milieu transparent (eau, verre) à la surface de la cible pour confiner le plasma. La pression est alors donnée par :

$$P = \frac{(c_e - c_p) \rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu) \sigma_Y + \sqrt{\left[ \frac{(c_e - c_p) \rho_t c_t}{2c_e(\rho_t c_t + \rho c_p)} (1 + \lambda/2\mu) \sigma_Y \right]^2 + \frac{\Phi}{10} \cdot \frac{\rho \rho_t c_t c_p}{\rho_t c_t + \rho c_p}}$$

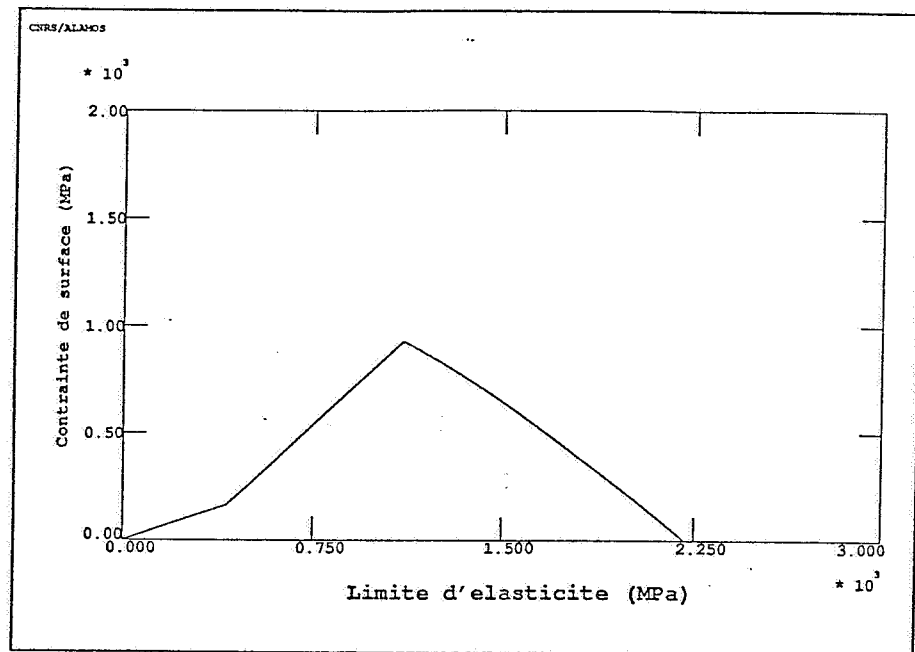
(relation biunivoque entre flux laser et pression atteinte). L'application de cette formule montre que l'utilisation d'eau au lieu de verre provoque une chute de pression d'un facteur 2. Cette formule est applicable tant qu'il n'y a pas de claquage dans le milieu transparent. Il existe donc une valeur maximale de pression accessible fonction du milieu transparent et du temps d'impulsion laser.

## 2.2. Choix du matériau, les paramètres laser étant fixés

On suppose en fait le type de matériau déterminé (par exemple un acier) pour une application donnée et l'on cherche quel état métallurgique (quelle limite d'élasticité) va permettre de maximiser la contrainte résiduelle de surface induite par choc-laser. Soit  $\Phi$  le flux laser maximum utilisable compte-tenu des phénomènes de claquage. Ce flux est fonction du milieu confinant (en général de l'eau) et du temps d'impulsion laser (typiquement de 3 à 30 nanosecondes). La pression  $P$  disponible est alors donnée par la formule ci-dessus. La contrainte de surface sera alors :

$$\sigma_{\text{surf}} = -\sigma_Y \cdot f \left( \frac{P}{(1+\lambda/2\mu)\sigma_Y} - 1 \right) \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)l}{\pi a} \right]$$

Nous représentons ci-après dans le cas d'un acier la contrainte de surface induite par un impact carré de côté 5 mm produit par une impulsion de 30 ns et d'intensité 10 GW/cm<sup>2</sup> confinée par de l'eau (en présence d'une fine couche de peinture).



On constate l'existence d'un optimum de la limite d'élasticité. Cette valeur s'exprime en fonction du flux et des caractéristiques mécaniques de la cible et du milieu transparent :

$$\sigma_Y = \frac{1}{1+\lambda/2\mu} \sqrt{\frac{\Phi}{20} \frac{\rho \rho_t c_t c_p c_e}{\rho_t c_t (c_p + c_e) + 2 \rho c_p c_e}}$$

La profondeur affectée est alors :

$$l = \frac{c_e c_p \tau}{(c_e - c_p)}$$

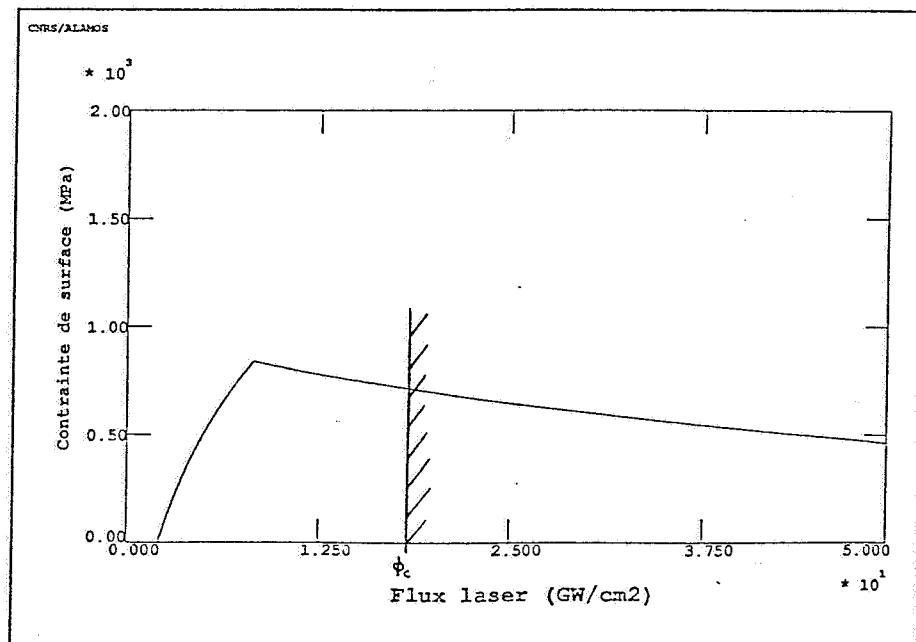
et la contrainte de surface vaut :

$$\sigma_{\text{surf}} = -\sigma_Y \cdot \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)}{\pi} \frac{c_e c_p \tau}{a(c_e - c_p)} \right]$$



### 2.3. Choix des paramètres laser, le matériaux étant fixé

On s'intéresse maintenant à un autre problème : le matériau constituant la cible étant totalement déterminé, comment fixer les paramètres laser de manière à maximiser la contrainte de surface ? Là encore, les résultats de ce travail permettent de répondre. En effet, les formules données ci-dessus permettent de calculer la contrainte de surface en fonction du flux laser. Prenons, l'exemple d'un acier de limite d'élasticité 1000 MPa subissant un impact laser de côté 5 mm confiné par de l'eau en présence d'une fine couche de peinture. La contrainte induite en surface en fonction du flux laser incident est donnée par :



On constate que, là encore, il existe un optimum de flux. Néanmoins, toutes les valeurs de flux ne sont pas admises du fait des phénomènes de claquage. Si le flux optimum est inférieur au seuil de claquage  $\Phi_c$ , il constitue bien l'optimum. Sinon, le flux optimum est le seuil de claquage  $\Phi_c$ .

L'optimum de flux est donné par la formule suivante :

$$\Phi = 20.(1+\lambda/2\mu)^2 \sigma_Y^2 \left[ \frac{c_e+c_p}{\rho c_e c_p} + \frac{2}{\rho_t c_t} \right]$$

#### **2.4. Obtention d'une profondeur traitée donnée**

Lorsque l'on superpose des impacts en un endroit donné de la surface de la cible, la contrainte de surface ne change mais la profondeur affectée croît linéairement avec le nombre d'impacts. Néanmoins, cela n'est vrai que tant la profondeur traitée ne dépasse pas la moitié de la taille (diamètre par exemple) de l'impact. Au-delà, si l'on ajoute encore des impacts, la profondeur affectée n'augmente plus. La profondeur maximale de traitement accessible dépend donc de la taille de la zone que l'on peut traiter avec un seul impact et donc de la puissance du laser utilisé.

#### **2.5. Réalisation d'une bande de traitement homogène**

Les conditions d'optimisation d'un impact isolé étant réalisée, on peut obtenir une bande de traitement homogène en utilisant au choix des impacts carrés juxtaposés ou des impacts circulaires décalés (de sorte que la périphérie du nouvel impact englobe le centre du précédent).





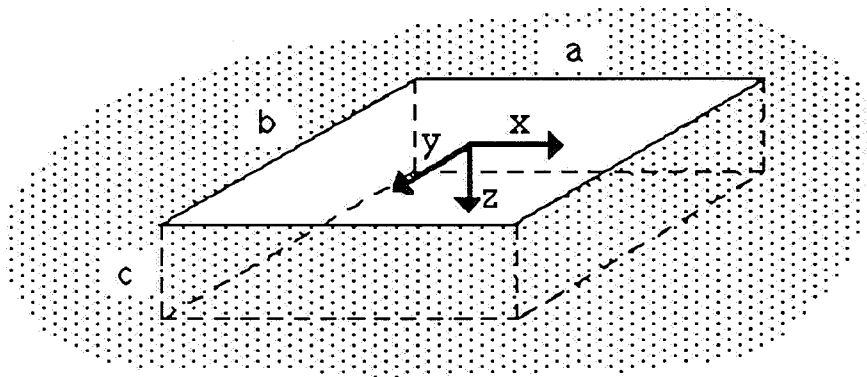
## Annexe A

# Calcul du champ de contrainte induit dans un massif semi-infini par un champ de déformation plastique homogène dans une inclusion parallélépipédique affleurant à la surface

### 1. Position du problème

Le problème est, rappelons-le, le suivant : on considère une inclusion parallélépipédique, de côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$ , affleurant à la surface d'un massif semi-infini élastique et dans laquelle existe un champ de déformation plastique uniforme de la forme :

$$\underline{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix}$$



Le cas d'une inclusion cubique contenant une déformation plastique un peu différente a déjà été traité par Lin (v. [1]).

On s'intéresse au champ de contrainte induit dans tout le massif semi-infini par cette inclusion.

## 2. Technique de résolution du problème

Mathématiquement, le problème s'énonce de la manière suivante :

On a un champ de déformation plastique  $\underline{\varepsilon}^p$  constant dans un domaine  $\Omega$  et nul dans le reste du massif semi-infini. On cherche le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  solution des équations suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\sigma} &= 0 \\ \underline{\sigma} &= \underline{L}:(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) \\ \underline{\sigma} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{sur la surface du massif}\end{aligned}$$

avec  $\underline{\varepsilon}$  dérivant d'un champ de déplacement nul à l'infini.

Posons :

$$\underline{\sigma} = -2\mu \underline{\varepsilon}^p + \underline{\Delta\sigma}$$

les équations se réécrivent alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\Delta\sigma} &= 2\mu \operatorname{div} \underline{\varepsilon}^p \\ \underline{\Delta\sigma} &= \underline{L}:\underline{\varepsilon} \\ \underline{\Delta\sigma} \cdot \vec{n} &= 2\mu \underline{\varepsilon}^p \cdot \vec{n} \quad \text{sur la surface du massif}\end{aligned}$$

Le problème est donc de déterminer le champ de contrainte induit dans un massif semi-infini par des forces de volume :

$$-2\mu \operatorname{div} \underline{\varepsilon}^p \quad \text{dans le volume } \Omega$$

et des forces de surface :

$$2\mu \underline{\varepsilon}^p \cdot \vec{n} \quad \text{sur la surface } \partial\Omega \quad (\vec{n} \text{ normale sortante})$$

Le champ  $\underline{\varepsilon}^p$  étant constant sur  $\Omega$ , il suffit donc de calculer le champ de contrainte produit par les forces de surface.

Ce problème est résolu si l'on sait calculer le champ de contrainte induit par une force ponctuelle quelque part dans le massif semi-infini. En effet, après il ne s'agira plus que d'intégrer sur toute la surface  $\partial\Omega$  pour avoir le champ de contrainte  $\underline{\Delta\sigma}$  résultant.

Le problème de l'action d'une force ponctuelle sur un massif semi-infini élastique a été résolu par Mindlin en 1953 (v. [1]).

On considère une force ponctuelle  $\vec{F} (F_x, F_y, F_z,)$  appliquée au point de coordonnées  $(0, 0, c)$  ( $c$  est la distance à la surface libre). Mindlin a montré que la contrainte  $\underline{\sigma}$  est alors donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial B_y}{\partial y} - y \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial B_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial B_x}{\partial x} - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial B_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + 2\nu \frac{\partial B_x}{\partial x} - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} + 2\nu \frac{\partial B_y}{\partial y} - y \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\sigma_{xz} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial z} - y \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial z} - z \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial z} \right]$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} - y \frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z} - z \frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} \right]$$

où,  $\vec{B}$  et  $\beta$  (fonctions de Papkovitch) sont données par :

$$B_x = \frac{F_x}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$B_y = \frac{F_y}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$B_z = \frac{(xF_x + yF_y)}{2\pi\mu} \left[ \frac{(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{c}{R_2^3} \right] + \frac{F_z}{4\pi\mu} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{3-4\nu}{R_2} + \frac{2c(z+c)}{R_2^3} \right]$$

$$\beta = \frac{(xF_x + yF_y)}{2\pi\mu} \left[ \frac{\nu(1-2\nu)}{R_2} - \frac{(1-2\nu)z}{R_2(R_2+z+c)} - (1-\nu)(1-2\nu) \frac{(R_2-z-c)}{R_2(R_2+z+c)} \right] \\ + \frac{F_z}{4\pi\mu} \left[ 4(1-\nu)(1-2\nu) \log(R_2+z+c) - \frac{c}{R_1} - \frac{(3-4\nu)c}{R_2} \right]$$

avec :

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2} \\ R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+c)^2}$$

De ces résultats, il est alors très facile de déduire l'expression intégrale du tenseur  $\underline{\Delta\sigma}$  recherché.

A titre d'exemple, on donne l'expression intégrale de  $\Delta\sigma_{xx}$ , les autres pourraient s'écrire de la même manière.  $\Delta\sigma_{xx}$  est la somme de six termes, chacun correspondant à l'intégration sur une des six faces du parallélépipède.

$$\Delta\sigma_{xx} = C_{x=\frac{a}{2}} + C_{x=-\frac{a}{2}} + C_{y=\frac{b}{2}} + C_{y=-\frac{b}{2}} + C_{z=0} + C_{z=c}$$

où  $C_{f(x,y,z)=0}$  désigne l'intégrale sur la partie de la surface du parallélépipède comprise dans le plan d'équation  $f(x,y,z)=0$ .

On a alors :

$$C_{x=\frac{a}{2}} = \frac{\epsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^c \left[ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{x_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + 2\nu(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x_1}{R_2(R_2+z+\gamma)} \right) \right. \\ \left. - 2\nu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\gamma x_1}{R_2^3} \right) + z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\gamma x_1}{R_2^3} \right) - \nu(1-2\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x_1}{R_2} \right) + (1-\nu)(1-2\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x_1(R_2-z-\gamma)}{R_2(R_2+z+\gamma)} \right) \right] d\beta d\gamma$$

où :

$$x_1 = x - \frac{a}{2} \quad , \quad R_1 = \sqrt{x_1^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} \quad , \quad R_2 = \sqrt{x_1^2 + (y-\beta)^2 + (z+\gamma)^2}$$

L'expression intégrale de  $C_{x=-\frac{a}{2}}$  s'en déduit ensuite très facilement en remplaçant  $x_1$  par  $x_2$  et en changeant le signe.



La forme intégrale des quatre autres termes de  $\Delta\sigma_{xx}$  s'écrirait exactement de la même manière en utilisant les formules de Mindlin. De même, on pourrait écrire l'expression intégrale des autres composantes du tenseur  $\underline{\Delta\sigma}$ .

### 3. Résultats du calcul

On pose pour toute cette partie :

$$x_1 = x - a/2 \quad y_1 = y - b/2 \quad z_1 = z - c$$

$$x_2 = x + a/2 \quad y_2 = y + b/2 \quad z_2 = z + c$$

$$r_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2} \quad i,j,k = 1 \text{ ou } 2$$

$$r_{ij0} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_0^2} \quad i,j = 1 \text{ ou } 2$$

Après calcul des intégrales, on déduit de la partie ci-dessus :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xx} = & \frac{-\mu\epsilon p}{4\pi(1-\nu)} \left\{ 2\nu \left( \text{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z_1 r_{111}} - \text{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z_1 r_{121}} - \text{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z_1 r_{211}} + \text{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z_1 r_{221}} \right) \right. \\ & + 2\nu(3-4\nu) \left( \text{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z_2 r_{112}} - \text{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z_2 r_{122}} - \text{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z_2 r_{212}} + \text{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z_2 r_{222}} \right) \\ & - 4\nu c \left[ \frac{x_1}{x_1^2 + z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) + \frac{y_1}{y_1^2 + z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{212}} - \frac{x_1}{r_{112}} \right) + \frac{y_2}{y_2^2 + z_2^2} \left( \frac{x_1}{r_{122}} - \frac{x_2}{r_{222}} \right) \right] \\ & + z_1 \left[ \frac{x_1}{x_1^2 + z_1^2} \left( \frac{y_2}{r_{121}} - \frac{y_1}{r_{111}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_1^2} \left( \frac{y_1}{r_{211}} - \frac{y_2}{r_{221}} \right) \right] + (3-4\nu) z_1 \left[ \frac{x_1}{x_1^2 + z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) \right] \\ & + 2cz z_2 \left[ \frac{2x_1}{(x_1^2 + z_2^2)^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) + \frac{2x_2}{(x_2^2 + z_2^2)^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) + \frac{x_1}{x_1^2 + z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}^3} - \frac{y_1}{r_{112}^3} \right) + \frac{x_2}{x_2^2 + z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}^3} - \frac{y_2}{r_{222}^3} \right) \right] \\ & + 4(1-\nu)(1-2\nu) \left[ - \text{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_1 r_{112}} + \text{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_1 r_{122}} + \text{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_2 r_{212}} - \text{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_2 r_{222}} \right. \\ & \quad \left. + \text{Arctg} \frac{y_1 z}{x_1 r_{110}} - \text{Arctg} \frac{y_2 z}{x_1 r_{120}} - \text{Arctg} \frac{y_1 z}{x_2 r_{210}} + \text{Arctg} \frac{y_2 z}{x_2 r_{220}} \right] \\ & - 8\nu(1-\nu) \left( \text{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z r_{110}} - \text{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z r_{120}} - \text{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z r_{210}} + \text{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z r_{220}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4(1-v)z \left[ \frac{x_1}{x_1^2+z^2} \left( \frac{y_2}{r_{120}} - \frac{y_1}{r_{110}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2+z^2} \left( \frac{y_1}{r_{210}} - \frac{y_2}{r_{220}} \right) \right] \\
& + (1-v) \left( \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_1 r_{112}} - \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_1 r_{122}} - \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z_1}{x_1 r_{111}} + \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z_1}{x_1 r_{121}} \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_2 r_{212}} + \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_2 r_{222}} + \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z_1}{x_2 r_{211}} - \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z_1}{x_2 r_{221}} \right) \\
& + v \left( \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_1 r_{112}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_1 r_{122}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z_1}{y_1 r_{111}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z_1}{y_1 r_{121}} \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_2 r_{212}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_2 r_{222}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z_1}{y_2 r_{211}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z_1}{y_2 r_{221}} \right) \\
& - 2v \left( \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_1 r_{112}} - \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_1 r_{122}} - \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z}{x_1 r_{110}} + \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z}{x_1 r_{120}} \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_2 r_{212}} + \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_2 r_{222}} + \operatorname{Arctg} \frac{y_1 z}{x_2 r_{210}} - \operatorname{Arctg} \frac{y_2 z}{x_2 r_{220}} \right) \\
& - 4v^2 \left( \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_1 r_{112}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_1 r_{122}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z}{y_1 r_{110}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z}{y_1 r_{120}} \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_2 r_{212}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_2 r_{222}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_1 z}{y_2 r_{210}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_2 z}{y_2 r_{220}} \right) \\
& + \frac{x_2}{2} \left\{ \frac{z_2}{x_2^2+z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{222}} - \frac{y_1}{r_{212}} \right) + \frac{z_1}{x_2^2+z_1^2} \left( \frac{y_1}{r_{211}} - \frac{y_2}{r_{221}} \right) \right\} - \frac{x_1}{2} \left\{ \frac{z_2}{x_1^2+z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) + \frac{z_1}{x_1^2+z_1^2} \left( \frac{y_1}{r_{111}} - \frac{y_2}{r_{121}} \right) \right\} \\
& + (1+2v)c \left\{ \frac{x_2}{x_2^2+z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{222}} - \frac{y_1}{r_{212}} \right) - \frac{x_1}{x_1^2+z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{122}} - \frac{y_1}{r_{112}} \right) \right\} \\
& + 2vc \left\{ \frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{222}} - \frac{x_1}{r_{122}} \right) - \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{212}} - \frac{x_1}{r_{112}} \right) \right\} \\
& + 2vx_2 \left\{ \frac{z_2}{x_2^2+z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) + \frac{z}{x_2^2+z^2} \left( \frac{y_2}{r_{220}} - \frac{y_1}{r_{210}} \right) \right\} - 2vx_1 \left\{ \frac{z_2}{x_1^2+z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{112}} - \frac{y_2}{r_{122}} \right) + \frac{z}{x_1^2+z^2} \left( \frac{y_2}{r_{120}} - \frac{y_1}{r_{110}} \right) \right\} \\
& + cx_{2z} \left\{ \frac{z_2}{x_2^2+z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}^3} - \frac{y_2}{r_{222}^3} \right) + \frac{2z_2}{(x_2^2+z_2^2)^2} \left( \frac{y_1}{r_{212}} - \frac{y_2}{r_{222}} \right) \right\} - cx_{1z} \left\{ \frac{z_2}{x_1^2+z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{112}^3} - \frac{y_2}{r_{122}^3} \right) + \frac{2z_2}{(x_1^2+z_2^2)^2} \left( \frac{y_1}{r_{112}} - \frac{y_2}{r_{122}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$\Delta\sigma_{yy}$  s'obtient facilement en échangeant  $x_1$  et  $y_1$ ,  $x_2$  et  $y_2$ , dans l'expression ci-dessus, ainsi qu'en remplaçant tous les  $r_{ijk}$  par  $r_{jik}$ .

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{zz} = \frac{-\mu\epsilon^p}{4\pi(1-v)} & \left\{ 2(1-v) \left[ \operatorname{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z_1 r_{111}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z_1 r_{121}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z_1 r_{211}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z_1 r_{221}} \right. \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z_2 r_{112}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z_2 r_{122}} - \operatorname{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z_2 r_{212}} + \operatorname{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z_2 r_{222}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4(1-\nu) \left[ \text{Arctg} \frac{x_1 y_1}{z r_{110}} - \text{Arctg} \frac{x_1 y_2}{z r_{120}} - \text{Arctg} \frac{x_2 y_1}{z r_{210}} + \text{Arctg} \frac{x_2 y_2}{z r_{220}} \right] \\
& + \sqrt{\left[ \text{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_1 r_{112}} - \text{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_1 r_{122}} - \text{Arctg} \frac{y_1 z_1}{x_1 r_{111}} + \text{Arctg} \frac{y_2 z_1}{x_1 r_{121}} \right.} \\
& \quad \left. - \text{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_2 r_{212}} + \text{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_2 r_{222}} + \text{Arctg} \frac{y_1 z_1}{x_2 r_{211}} - \text{Arctg} \frac{y_2 z_1}{x_2 r_{221}} \right] \\
& + \sqrt{\left[ \text{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_1 r_{112}} - \text{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_1 r_{122}} - \text{Arctg} \frac{x_1 z_1}{y_1 r_{111}} + \text{Arctg} \frac{x_2 z_1}{y_1 r_{121}} \right.} \\
& \quad \left. - \text{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_2 r_{212}} + \text{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_2 r_{222}} + \text{Arctg} \frac{x_1 z_1}{y_2 r_{211}} - \text{Arctg} \frac{x_2 z_1}{y_2 r_{221}} \right] \\
& - 2\nu \left[ \text{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_1 r_{112}} - \text{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_1 r_{122}} - \text{Arctg} \frac{y_1 z}{x_1 r_{110}} + \text{Arctg} \frac{y_2 z}{x_1 r_{120}} \right. \\
& \quad \left. - \text{Arctg} \frac{y_1 z_2}{x_2 r_{212}} + \text{Arctg} \frac{y_2 z_2}{x_2 r_{222}} + \text{Arctg} \frac{y_1 z}{x_2 r_{210}} - \text{Arctg} \frac{y_2 z}{x_2 r_{220}} \right] \\
& - 2\nu \left[ \text{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_1 r_{112}} - \text{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_1 r_{122}} - \text{Arctg} \frac{x_1 z}{y_1 r_{110}} + \text{Arctg} \frac{x_2 z}{y_1 r_{120}} \right. \\
& \quad \left. - \text{Arctg} \frac{x_1 z_2}{y_2 r_{212}} + \text{Arctg} \frac{x_2 z_2}{y_2 r_{222}} + \text{Arctg} \frac{x_1 z}{y_2 r_{210}} - \text{Arctg} \frac{x_2 z}{y_2 r_{220}} \right] \\
& + \left( \frac{5-4\nu}{2} z_2 - (1-2\nu) c \right) \left[ \frac{x_1}{x_1^2+z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{112}} - \frac{y_2}{r_{122}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2+z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{222}} - \frac{y_1}{r_{212}} \right) + \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2} \left( \frac{x_1}{r_{112}} - \frac{x_2}{r_{212}} \right) + \frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{222}} - \frac{x_1}{r_{122}} \right) \right] \\
& + \frac{3}{2} z_1 \left[ \frac{x_1}{x_1^2+z_1^2} \left( \frac{y_1}{r_{111}} - \frac{y_2}{r_{121}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2+z_1^2} \left( \frac{y_2}{r_{221}} - \frac{y_1}{r_{211}} \right) + \frac{y_1}{y_1^2+z_1^2} \left( \frac{x_1}{r_{111}} - \frac{x_2}{r_{211}} \right) + \frac{y_2}{y_2^2+z_1^2} \left( \frac{x_2}{r_{221}} - \frac{x_1}{r_{121}} \right) \right] \\
& - 2(2-\nu) z \left[ \frac{x_1}{x_1^2+z^2} \left( \frac{y_1}{r_{110}} - \frac{y_2}{r_{120}} \right) + \frac{x_2}{x_2^2+z^2} \left( \frac{y_2}{r_{220}} - \frac{y_1}{r_{210}} \right) + \frac{y_1}{y_1^2+z^2} \left( \frac{x_1}{r_{110}} - \frac{x_2}{r_{210}} \right) + \frac{y_2}{y_2^2+z^2} \left( \frac{x_2}{r_{220}} - \frac{x_1}{r_{120}} \right) \right] \\
& + 3c z z_2 \left[ \frac{2x_1}{x_1^2+z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{112}} - \frac{y_2}{r_{122}} \right) + \frac{2x_2}{x_2^2+z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{222}} - \frac{y_1}{r_{212}} \right) + \frac{2y_1}{y_1^2+z_2^2} \left( \frac{x_1}{r_{112}} - \frac{x_2}{r_{212}} \right) + \frac{2y_2}{y_2^2+z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{222}} - \frac{x_1}{r_{122}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{x_1}{x_1^2+z_2^2} \left( \frac{y_1}{r_{112}^3} - \frac{y_2}{r_{122}^3} \right) + \frac{x_2}{x_2^2+z_2^2} \left( \frac{y_2}{r_{222}^3} - \frac{y_1}{r_{212}^3} \right) + \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2} \left( \frac{x_1}{r_{112}^3} - \frac{x_2}{r_{212}^3} \right) + \frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{222}^3} - \frac{x_1}{r_{122}^3} \right) \right] \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma_{xy} = & \frac{-\mu \varepsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \left\{ 2(2-\nu)(1-2\nu) \log \frac{(r_{112}+z_2)(r_{222}+z_2)(r_{120}+z)(r_{210}+z)}{(r_{122}+z_2)(r_{212}+z_2)(r_{110}+z)(r_{220}+z)} \right. \\
& \left. - (2-\nu) \log \frac{(r_{112}+z_2)(r_{222}+z_2)(r_{121}+z_1)(r_{211}+z_1)}{(r_{122}+z_2)(r_{212}+z_2)(r_{111}+z_1)(r_{221}+z_1)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{5-4\nu}{2} z_2 - (7-8\nu) c \right) \left( \frac{1}{r_{112}} - \frac{1}{r_{122}} - \frac{1}{r_{212}} + \frac{1}{r_{222}} \right) + \frac{3}{2} z_1 \left( \frac{1}{r_{111}} - \frac{1}{r_{121}} - \frac{1}{r_{211}} + \frac{1}{r_{221}} \right) \\
& - 2(2-\nu) z \left( \frac{1}{r_{110}} - \frac{1}{r_{120}} - \frac{1}{r_{210}} + \frac{1}{r_{220}} \right) + 3czz_2 \left( \frac{1}{r_{112}^3} - \frac{1}{r_{122}^3} - \frac{1}{r_{212}^3} + \frac{1}{r_{222}^3} \right) \\
& - (1-\nu)(1-2\nu) \left[ \left( \frac{r_{110}-z}{r_{110}+z} \right)^2 - \left( \frac{r_{112}-z_2}{r_{112}+z_2} \right)^2 + \left( \frac{r_{122}-z_2}{r_{122}+z_2} \right)^2 - \left( \frac{r_{120}-z}{r_{120}+z} \right)^2 - \left( \frac{r_{210}-z}{r_{210}+z} \right)^2 + \left( \frac{r_{212}-z_2}{r_{212}+z_2} \right)^2 - \left( \frac{r_{222}-z_2}{r_{222}+z_2} \right)^2 + \left( \frac{r_{220}-z}{r_{220}+z} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{yz} = & \frac{-\mu\epsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \log \frac{(r_{211}+x_2)(r_{121}+x_1)}{(r_{111}+x_1)(r_{221}+x_2)} + \frac{1}{2} \log \frac{(r_{112}+x_1)(r_{222}+x_2)}{(r_{212}+x_2)(r_{122}+x_1)} \right. \\
& + 2(2-\nu)z^2 \left[ \frac{1}{y_1^2+z^2} \left( \frac{x_1}{r_{110}} - \frac{x_2}{r_{210}} \right) + \frac{1}{y_2^2+z^2} \left( \frac{x_2}{r_{220}} - \frac{x_1}{r_{120}} \right) \right] \\
& + \frac{3}{2} z_1^2 \left[ \frac{1}{y_1^2+z_1^2} \left( \frac{x_2}{r_{211}} - \frac{x_1}{r_{111}} \right) + \frac{1}{y_2^2+z_1^2} \left( \frac{x_1}{r_{121}} - \frac{x_2}{r_{221}} \right) \right] \\
& + \left[ \left( \frac{5-6\nu}{2} \right) z_2^2 - 3(3-2\nu)cz_2 + 5c^2 \right] \left[ \frac{1}{y_1^2+z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{212}} - \frac{x_1}{r_{112}} \right) + \frac{1}{y_2^2+z_2^2} \left( \frac{x_1}{r_{122}} - \frac{x_2}{r_{222}} \right) \right] \\
& + 3cz \left[ \frac{2z_2^2}{(y_1^2+z_2^2)^2} \left( \frac{x_2}{r_{212}} - \frac{x_1}{r_{112}} \right) + \frac{2z_2^2}{(y_2^2+z_2^2)^2} \left( \frac{x_1}{r_{122}} - \frac{x_2}{r_{222}} \right) + \frac{z_2^2}{y_1^2+z_2^2} \left( \frac{x_2}{r_{212}^3} - \frac{x_1}{r_{112}^3} \right) + \frac{z_2^2}{y_2^2+z_2^2} \left( \frac{x_1}{r_{122}^3} - \frac{x_2}{r_{222}^3} \right) \right]
\end{aligned}$$

$\Delta\sigma_{xz}$  s'obtient facilement en échangeant  $x_1$  et  $y_1$ ,  $x_2$  et  $y_2$ , dans l'expression ci-dessus, ainsi qu'en remplaçant tous les  $r_{ijk}$  par  $r_{jik}$ .

## Références

- [1] T. H. Lin & T. K. Tung, "The Stress Field Produced by Localized Plastic Slip at a Free Surface", *Journal of Applied Mechanics*, September 1962.
- [2] R.D. Mindlin, "Forces at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid", *Proceedings of The First Midwestern Conference of Solid Mechanics*, 1953, pp. 56-59.
- [3] A. E. Love, "On Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary", *Philosophical Transactions of The Royal Society, series A*, Vol. 228, 1929, p. 377.
- [4] T. Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", *Martinus Nijhoff Publishers, The Hague/Boston/London*, 1982.









## Annexe B

# Résolution des systèmes différentiels hyperboliques par la méthode des caractéristiques

## Introduction

La propagation des ondes de pressions (dites acoustiques) dans les milieux solides et fluides est souvent régie par des systèmes différentiels dits hyperboliques (v. ci-dessous pour la signification de ce terme). Dans l'analyse du comportement d'un solide sous sollicitation dynamique, on est donc souvent ramené à des systèmes d'équations aux dérivées partielles desquelles il faut extraire de l'information. La méthode des caractéristiques est un moyen d'y parvenir. Nous nous proposons donc de décrire ici brièvement les systèmes hyperboliques et quelques résultats de base concernant leur résolution par la méthode des caractéristiques.

## 1. Eléments sur les systèmes différentiels

On adopte les notations suivantes :

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ; \quad u = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) ; \quad u_{,i} = (u_{1,i} \ u_{2,i} \ \dots \ u_{n,i})$$

On appelle système différentiel d'ordre  $n$ , un système d'équation du type :

$$F_i[u_{,j}, u, x_k \ (j, l=1, \dots, n ; k=1, \dots, m)] \quad (i=1, \dots, n)$$

Si les  $F_i$  sont linéaires par rapport aux  $u_{,i}$ , le système est dit *quasi-linéaire*. On peut alors l'écrire sous la forme :

$$A_i u_{,i} + C = 0$$

où l'on applique la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Les  $A_i$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$  et  $C$  une matrice colonne d'ordre  $n$ . Les coefficients de ces matrices ne sont fonctions que de  $u$  et des  $x_j$ . Si les coefficients des  $A_i$  sont indépendants de  $u$ , le système est dit *semi-linéaire*. Si, de plus,  $C$  dépend linéairement de  $u$ , le système est alors *linéaire*.

Si, l'on ajoute à ce système des conditions initiales suffisamment précises et suffisamment régulières, il existe alors des théorèmes d'unicité de solutions à de tels problèmes (pour une approche plus détaillée de la question, v. par exemple [1]).

## 2. Equations et courbes caractéristiques

On suppose maintenant que les variables  $x_j$  ne sont plus qu'au nombre de 2. On les notera  $x$  et  $t$ . Un système différentiel quasi-linéaire s'écrit alors :

$$A u_{,x} + B u_{,t} + C = 0$$

où, rappelons-le,  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$  et  $C$  une matrice colonne d'ordre  $n$ . Les coefficients de ces matrices ne sont fonctions que de  $u$ ,  $x$  et  $t$ . On supposera ces fonctions différentiables. On appellera *déterminant caractéristique* du système hyperbolique quasi-linéaire, la quantité :

$$|A - aB|$$

Ce déterminant est un polynôme de degré  $n$  en  $a$ . S'il ne possède aucune racine réelle, le système est dit *elliptique*. S'il possède  $n$  racines réelles distinctes, le système est alors dit *complètement hyperbolique*. On s'intéresse maintenant aux systèmes différentiels quasi-linéaires complètement

hyperboliques. Soit  $a$  une fonction (de  $u$ ,  $x$  et  $t$ ) racine du déterminant caractéristique. Une courbe régulière quelconque du plan  $(x, t)$  vérifiant l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = a$$

est appelée *courbe caractéristique* du système. On va maintenant montrer que, le long de ces courbes caractéristiques, il existe des équations simples permettant de résoudre le système. En effet, sachant :

$$|A - aB| = 0$$

il existe un vecteur  $I$  non nul tel que :

$$I(A - aB) = 0$$

Le système différentiel implique alors :

$$IB(u_{,t} + au_{,x}) + IC = 0$$

soit :

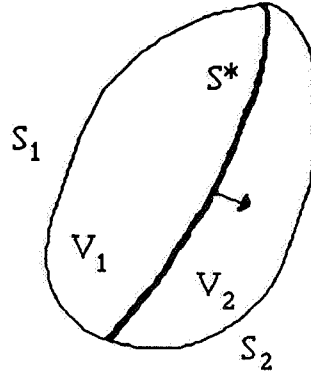
$$IB \frac{du}{dt} + IC = 0$$

Cette équation valable tout le long de la courbe caractéristique s'appelle *équation caractéristique*. Cette équation, qui ne fait intervenir qu'une dérivée totale est beaucoup plus facile à intégrer que les équations correspondantes du système. Dans le cas où on ne peut cependant intégrer ces équations caractéristiques analytiquement, on pourra cependant le faire rapidement et simplement numériquement en faisant un 'maillage' du plan  $(x, t)$  avec les courbes caractéristiques et en intégrant numériquement les équations caractéristiques.

### 3. Cas d'existence de discontinuités

On considère un volume  $V$  limité par une surface  $S$  dans lequel existe une surface  $S^*$  sur laquelle existe une

discontinuité de vitesse matérielle. Cette discontinuité est nécessairement mobile pour que n'apparaisse pas de trou dans le volume. On appelle  $c$  la vitesse de propagation de cette surface de discontinuité  $S^*$  (que l'on appelle aussi onde de choc). Cette surface est supposée partager le volume  $V$  en deux volumes disjoints  $V_1$  et  $V_2$ .



Hadamard et Mandel ont montré que, si  $f(x,t)$  est continue et différentiable par rapport à  $x$  sur  $V$  et par rapport à  $t$ , on a alors :

$$\frac{d}{dt} \int_V f(x,t) dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} f(x,t) dS$$

Si  $f$  présente une discontinuité sur  $S^*$ , on peut alors écrire cette formule sur chacun des volumes  $V_1$  et  $V_2$  et sommer. Il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_V f(x,t) dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} f(x,t) dS + \int_{S^*} (f_1 - f_2) c dS$$

où l'on a supposé que la surface  $S^*$  se propage de  $V_1$  vers  $V_2$ . Appliquons cette identité à la fonction :

$$f(x,t) = \rho \vec{v}$$

Il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \rho \vec{v} dS + \int_{S^*} \rho (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) c dS$$

soit :

$$\int_S \underline{\sigma} \vec{n} dV = \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \rho \vec{v} dS + \int_{S^*} \rho (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) c dS$$

Plaçons-nous maintenant en un instant donné  $t$  et faisons tendre  $S_1$  et  $S_2$  vers une partie donnée  $S_0^*$  de  $S^*$  de manière à ce que le volume  $V$  tende vers 0. Il vient alors :

$$\int_{S_0^*} (\underline{\sigma}_2 - \underline{\sigma}_1) \vec{n} dV = - \int_{S_0^*} \rho \vec{v}_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} dS + \int_{S_0^*} \rho \vec{v}_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n} dS + \int_{S_0^*} \rho (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) c dS$$

La surface  $S_0^*$  ayant été choisie arbitrairement, on en déduit :

$$(\underline{\sigma}_2 - \underline{\sigma}_1) \vec{n} = - \rho \vec{v}_2 (c - \vec{v}_2 \cdot \vec{n}) + \rho \vec{v}_1 (c - \vec{v}_1 \cdot \vec{n})$$

La vitesse matérielle étant toujours largement négligeable devant la vitesse de propagation d'un choc, on a alors :

$$[\underline{\sigma}] \vec{n} = - \rho c [\vec{v}]$$

Ce résultat est souvent appelé *condition de continuité dynamique*. Il traduit la conservation de la quantité de mouvement au travers du front de choc.

#### 4. Application de ces résultats au calcul de la propagation d'ondes longitudinales dans un solide

Nous allons montrer ici que les résultats précédents permettent de calculer la propagation des ondes longitudinales dans les solides. Cette technique de calcul a été utilisée tout au long du chapitre 2 de la partie I. Reprenons le calcul de l'onde élastique induite par l'application d'une pression  $P$  pendant un temps  $\tau$  à la surface d'un solide assujetti à la déformation uniaxiale.

Les équations :

$$\text{div } \underline{\sigma} = \rho \ddot{\vec{u}}$$

et :

$$\sigma = L:\varepsilon$$

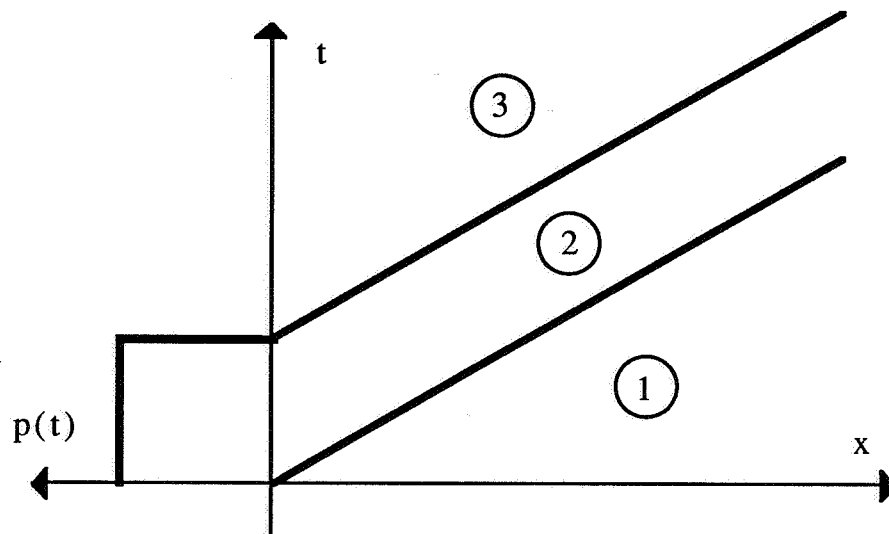
impliquent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

On reconnaît là un système différentiel linéaire hyperbolique, les directions caractéristiques sont données par :

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Le diagramme caractéristique est le suivant :



Les équations caractéristiques montrent alors que chacun des domaines 1, 2 et 3 est homogène en  $\sigma_x$  et  $v$ .  $\sigma_x$  est donné dans chacun des domaines par les conditions aux limites. Les conditions de continuité dynamique au travers de chacun des chocs permettent alors de déduire  $v$  dans chacun des trois domaines. On a alors :

$$\sigma_1 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$\sigma_2 = -P$$

$$v_2 = \frac{P}{\rho c_{el}}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$v_3 = 0$$

Les résultats précédents nous ont donc permis de calculer analytiquement la propagation de l'onde élastique dans la cible. Cette analyse peut également se faire dans le cas de l'élasto-plasticité (les résultats du calcul figurent dans le chapitre 2 de la partie I). Dans ce cas, il apparaît une difficulté supplémentaire à savoir qu'il y a deux systèmes linéaires hyperboliques régissant la propagation suivant que l'on est à l'intérieur ou sur la frontière du convexe de plasticité. En chaque point du plan  $(x, t)$  il faut donc d'abord déterminer si l'on est en régime élastique ou plastique pour déterminer quel système différentiel régit la propagation et appliquer ensuite les résultats précédents.

## Conclusion

On a développé ici les principes de la méthode des caractéristiques permettant de résoudre les systèmes différentiels quasi-linéaires hyperboliques. Ces principes nous ont permis tout au long du chapitre 2 d'exhiber des solutions analytiques à la réponse de solides élastiques et élasto-plastiques à certains cas particuliers de sollicitations.

## Références

- [1] R. Courant & D. Hilbert, "Partial Differential Equations", New York, 1962.
- [2] W. Nowacki, "Stress Waves in non Elastic Solids", Pergamon Press, 1978.
- [3] N. Cristescu, "Dynamic Plasticity", North Holland, 1967.
- [4] Pei Chi Chou & A. K. Hopkins, "Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading", 1972.







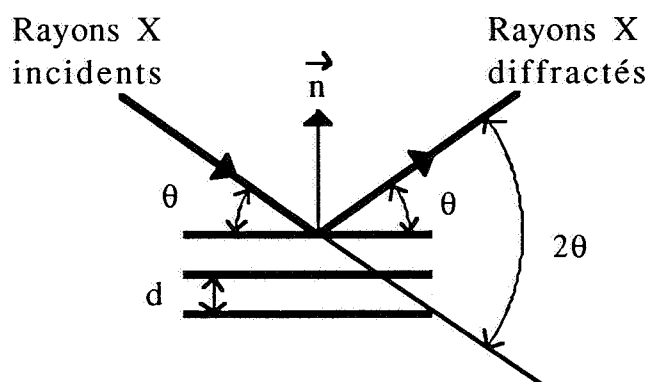
## Annexe C

# Mesure de contrainte résiduelle par diffraction de rayons X

## Introduction

La diffraction des rayons X est utilisée depuis très longtemps par les physiciens pour 'sonder' la matière à l'échelle microscopique. Cette méthode repose sur le principe énoncé par Bragg : un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  incident sur un cristal de distance interplanaire  $d$  est diffracté si la condition suivante sur l'angle de diffraction est vérifiée :

$$\lambda = 2d \sin\theta$$

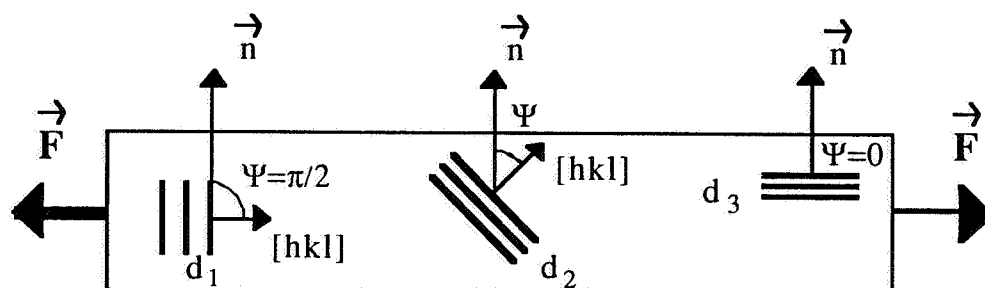


L'ordre de grandeur des distances interplanaires dans un cristal impose le choix d'une longueur d'onde correspondant aux rayons X pour observer une diffraction notable. Cette technique a permis d'obtenir expérimentalement la structure de la plupart des milieux cristallins. Cependant, depuis quelques années, cette technique est également employée pour mesurer les contraintes résiduelles éventuelles existant

en surface de matériaux cristallins. La description de cette technique est l'objet de cette partie.

## 1. Principe de la méthode

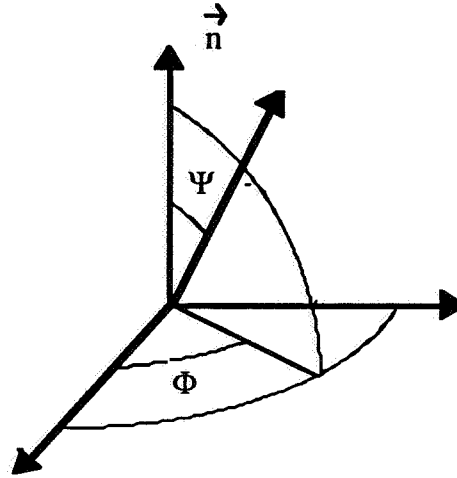
Considérons une tranche fine d'un métal constitué d'un grand nombre de grains dont les surfaces inférieures et supérieures sont libres tandis que l'on applique une contrainte aux deux extrémités :



On suppose le tenseur des contraintes homogène d'un point de vue macroscopique et plan. Du fait de la présence de multiples grains, on va trouver des cristaux dont les normales  $[hkl]$  (coordonnées dans un système d'axe du cristal) feront des angles  $\Psi$  différents avec la normale à la tranche  $\vec{n}$ . On s'aperçoit ainsi que la variation de distance planaire  $d$  dans les cristaux due à la présence d'un champ de contrainte n'est fonction, si le champ est homogène, que de l'angle  $\Psi$  du cristal (ou grain) considéré. On voit ainsi que s'il existe un grand nombre de grains, en plaçant judicieusement la source et le détecteur de rayons X, on peut faire diffracter n'importe quelle famille de plans dont la normale fait un angle  $\Psi$  avec la normale de l'échantillon et en déduire la distance interplanaire pour cette famille de cristaux. On peut ainsi accéder facilement à la courbe expérimentale  $d=f(\Psi)$  (ou  $\theta=f(\Psi)$ ).

Nous allons maintenant montrer comment l'on peut déduire de cette courbe  $\theta=f(\Psi)$  la valeur de la contrainte dans l'échantillon. On se donne un système de coordonnées

sphériques pour repérer une direction à la surface de l'échantillon :



Appelons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les valeurs propres du tenseur des contraintes dans l'échantillon. Soit  $\sigma_\Phi$  la valeur de la contrainte dans la direction  $\Phi$  (rappelons que le tenseur des contraintes est supposé plan) et  $\epsilon_{\Phi\Psi}$  la déformation élastique dans la direction définie par les angles  $\Phi$  et  $\Psi$ . La loi de Hooke s'écrit alors :

$$\epsilon_{\Phi\Psi} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_\Phi \cdot \sin^2\Psi - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau considéré. En remplaçant par  $\Psi=0$ , il vient :

$$\epsilon_{\Phi 0} = - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

d'où :

$$\sigma_\Phi = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_{\Phi\Psi} - \epsilon_{\Phi 0}) \cdot \frac{1}{\sin^2\Psi}$$

De plus, si  $d_0$  est la distance interplanaire pour l'angle  $\Psi=0$  de la normale au plan et  $d$  la distance interplanaire du cristal au repos, on a :

$$\epsilon_{\Phi\Psi} - \epsilon_{\Phi 0} = \frac{d\Psi - d}{d} - \frac{d_0 - d}{d} = \frac{d\Psi - d_0}{d}$$

En remplaçant  $d$  par  $d_0$  (l'erreur est de l'ordre de 0,001 %), on a alors :

$$\varepsilon_{\Phi\Psi} - \varepsilon_{\Phi 0} \approx \frac{d\Psi - d_0}{d_0}$$

De plus, en différenciant la loi de Bragg :

$$\frac{d\Psi - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d} = -\cotg\theta \cdot \Delta\theta = -\cotg\theta_{hkl} \cdot (\theta_{hkl} - \theta_{hkl}^0)$$

où  $\theta_{hkl}$  est l'angle auquel diffractent les plans  $hkl$  sous l'angle  $\Psi$  et  $\theta_{hkl}^0$  est l'angle auquel ils diffractent sous l'angle  $\Psi=0$ . On obtient donc enfin :

$$\theta_{hkl} - \theta_{hkl}^0 = \frac{1+\nu}{E \cdot \cotg\theta_{hkl}} \cdot \sigma_{\Phi} \cdot \sin^2\Psi$$

où, en remplaçant  $\theta_{hkl}$  par  $\theta_{hkl}^0$  dans la cotangente (ce qui n'est qu'une erreur du second ordre) :

$$\theta_{hkl} - \theta_{hkl}^0 = \frac{1+\nu}{E \cdot \cotg\theta_{hkl}^0} \cdot \sigma_{\Phi} \cdot \sin^2\Psi$$

On a donc montré que  $\sigma_{\Phi}$  est proportionnel à la pente de la droite  $\theta=f(\sin^2\Psi)$ . La connaissance de la droite expérimentale  $\theta=f(\sin^2\Psi)$  à  $\Phi$  fixé permet donc bien la détermination de  $\sigma_{\Phi}$ . La reproduction de cette mesure pour différentes valeurs de  $\Phi$  permet même alors d'accéder expérimentalement au tenseur. Les considérations énoncées ci-dessus débouchent donc bien sur une méthode de mesure du tenseur des contraintes résiduelles en surface d'un matériau métallique macroscopiquement isotrope.

## 2. Quelques limitations de la méthode

La première limitation est la présence éventuelle de texture dans l'échantillon. La texture est une répartition non aléatoire avec orientation préférentielle des grains ou cristaux dans l'échantillon. Il devient alors difficile de trouver des cristaux diffractant pour certaines directions  $\Psi$  et le tracé de la

droite des  $\sin^2\Psi$  est très imprécis. Ceci conduit évidemment à une évaluation mauvaise et surtout très imprécise de la contrainte.

La deuxième limitation concerne la taille des grains. Si la taille des grains n'est pas négligeable devant le diamètre du faisceau de rayons X, on a vu que la mesure devenait difficile du fait du faible nombre de plans diffractant. Or sur certains matériaux (par exemple quelques alliages d'aluminium), la taille des grains est si grande qu'elle nécessiterait une source de rayons X d'une puissance hors de portée de l'état actuel de la technologie. De plus, l'hypothèse d'homogénéité des contraintes dans la zone de mesure risquerait de n'être plus vérifiée.

## Références

- [1] L. Castex, "Compte rendu des Journées de Groupement Français pour l'Analyse des contraintes par diffractométrie X", notes rassemblées par G. Maeder, ENSAM Ais en Provence, 1984.









## Annexe D

# **Description des codes de calculs numériques utilisés**

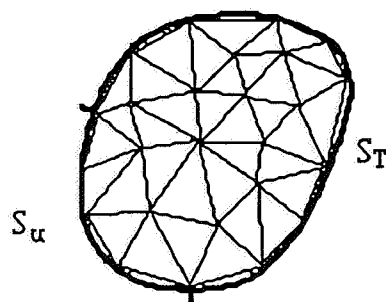
## **Introduction**

Tout au long de ce travail, il est apparu des résultats de calculs numériques. Pour ne pas alourdir l'exposé, il a été donné très peu d'information sur les algorithmes de calcul utilisés. Il nous paraît cependant important que ces détails soient mentionnés dans ce travail car celui-ci débouche finalement sur une technique de calcul du champ de contrainte résiduel induit par un impact rapide. Pour qu'un lecteur puisse éventuellement reproduire nos calculs dans le cas de sollicitations ou de matériaux différents, il importe qu'il connaisse les solutions algorithmiques retenues. Ces explications ont donc été reportées ici. Deux codes de calcul ont été nécessaires. Le premier permet de décrire la propagation des ondes induites dans la cible et d'évaluer le champ de déformation plastique ainsi créé, le deuxième permet de connaître les contraintes résiduelles induites par ce champ de déformation plastique. Le deuxième problème étant relativement classique, nous avons utilisé un code disponible, alors que le premier code a été, essentiellement pour des question de facilité de mise en oeuvre, totalement écrit. Le but de cette partie est donc de décrire les algorithmes et les approximations utilisées dans chacun de ces deux codes.

## 1. Principe de la méthode des éléments finis

On considère un volume  $V$  constitué d'une matière élastique, soumis à des forces de volume  $\vec{F}_d$ , à des forces de surfaces  $\vec{T}_d$  sur une partie  $S_T$  de sa surface, les déplacements étant donnés  $\vec{u}_d$  sur le reste de la surface  $S_u$ . On cherche à calculer numériquement le champ de déplacement à l'équilibre dans tout le volume.

La solution de ce problème étant à chercher dans un espace vectoriel de dimension infinie ( l'ensemble des champ de déplacement sur  $V$ ), il n'est pas possible de le résoudre numériquement tel quel. Il faut commencer par le discrétiser de manière à se ramener à un nombre fini de degrés de liberté. Pour ce faire, on va procéder de la manière suivante : on considère une partition de  $V_d$  (un polyèdre très proche de  $V$ ) en petits polyèdres (par exemples des tétrèdres) tels qu'aucun sommet (appelé noeuds) ne se trouve sur l'arrête d'un autre. En dimension deux, on utiliserait des polygones (par exemples des triangles). Ces petits éléments sont appelés éléments finis.



On note  $n_E$  le nombre d'éléments et  $n_N$  le nombre de noeuds. Soit  $\vec{u}_i$  ( $i=1, n_N$ ) des valeurs du déplacement en chacun des noeuds de la discrétisation (aussi appelée maillage). On se donne  $f_i$  ( $i=1, \dots, n_N$ ) une famille de fonctions d'interpolation sur  $V_d$ , chaque  $f_i$  étant partout nulle hors des éléments ayant le noeuds  $i$  pour sommet. On peut alors interpoler un champ de

déplacement quelconque sur  $V_d$  à l'aide de ses valeurs aux noeuds par la formule suivante :

$$\vec{u}(x) = \sum_{i=1}^{n_N} \vec{u}_i f_i(x)$$

On va chercher parmi les champs de cette forme (qui maintenant sont éléments d'un espace vectoriel de dimension finie) lequel satisfait le mieux les conditions d'équilibre de la structure.

On sait que la solution du problème réel est le champ de déplacement compatible avec les données sur  $S_u$  qui minimise la fonctionnelle :

$$\phi(\vec{u}) = \int_V \underline{\epsilon}(\vec{u}) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(\vec{u}) dV - \int_V \vec{F}_d \cdot \vec{u} dV - \int_{S_T} \vec{T}_d \cdot \vec{u} dS$$

La solution du problème discrétisé sera donc la famille  $\vec{u}_i$  minimisant la fonctionnelle :

$$\phi(\vec{u}_i) = \int_V \underline{\epsilon}\left(\sum_i \vec{u}_i f_i\right) : \underline{L} : \underline{\epsilon}\left(\sum_i \vec{u}_i f_i\right) dV - \int_V \vec{F}_d \cdot \left(\sum_i \vec{u}_i f_i\right) dV - \int_{S_T} \vec{T}_d \cdot \left(\sum_i \vec{u}_i f_i\right) dS$$

où les sommations s'effectuent sur tous les noeuds n'appartenant pas à  $S_u$ . Cette fonctionnelle peut se réécrire :

$$\phi(\vec{u}_i) = \sum_{i,j} \vec{u}_i \left( \int_V \underline{\epsilon}(f_i) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(f_j) dV \right) \vec{u}_j - \sum_i \left( \int_V \vec{F}_d \cdot (f_i) dV \right) \vec{u}_i - \sum_i \left( \int_{S_T} \vec{T}_d \cdot (f_i) dS \right) \vec{u}_i$$

ou, sous forme matricielle en introduisant la notation :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{U}) = \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \underline{K} \cdot \vec{U} - \underline{F} \cdot \vec{U}$$

où  $\underline{K}$  est une matrice carrée d'ordre égal au nombre de noeuds hors de  $S_u$  multiplié par le nombre de dimensions du

problème. Cette matrice est appelée matrice de rigidité et son ordre est le nombre de degrés de liberté du système discrétisé.  $F$  est une matrice ligne d'ordre égal au nombre de degrés de liberté du système discrétisé. On peut montrer (v. par exemple [1]) que la matrice de rigidité  $K$  est symétrique définie positive. La valeur de  $\vec{U}$  réalisant le minimum de la fonctionnelle est donc :

$$\vec{U} = K^{-1}.F$$

On constate qu'après discrétisation, le problème de départ se ramène à l'inversion d'une matrice symétrique définie positive suivie de la multiplication de deux matrices, problème qu'il est alors facile de traiter numériquement. On peut, de plus, montrer que lorsque le maillage s'affine dans un certain sens, alors la solution du problème discrétisé converge vers la solution réelle (v. par exemple [1]).

## **2. Description de l'algorithme permettant de calculer la propagation d'onde.**

Le problème que l'on voulait traiter numériquement (v. chapitre 2 de la partie I était la réponse d'un solide élasto-plastique ou élasto-viscoplastique assujéti à une déformation uniaxiale et à la surface duquel on applique une loi temporelle de pression variant sur des instants très courts. Comme il était nécessaire d'évaluer également le champ de déformation plastique induit, on s'est orienté sur une approche type éléments finis plutôt qu'un calcul numérique dérivé de la méthode des caractéristiques décrites dans l'annexe B. Le problème tel qu'il est posé dans la partie I est unidimensionnel, il a donc l'avantage de la simplicité de programmation et de la rapidité d'exécution de calcul. Par rapport au principe de base de la méthode des éléments finis tel qu'il est décrit dans la partie précédente, il faut cependant ajouter la plasticité (ou la viscoplasticité) et la prise en

compte des phénomènes dynamiques au travers des forces d'inertie.

## 2.1. Les éléments finis en dynamique

En dynamique, il devient nécessaire de prendre en compte la dimension temporelle. Les éléments finis réalisent une discrétisation spatiale, il faut également discrétiser le temps. Le principe est simple : on choisit arbitrairement un certain nombre d'instants suffisamment rapprochés (on a choisi ici de les prendre équidistants) et à chaque instant, on va calculer l'état du système à l'aide de la méthode des éléments finis telle qu'elle est décrite dans la partie précédente à ceci près que l'on va ajouter les forces d'inertie dans les efforts extérieurs. Ces forces sont évaluées à l'aide de l'algorithme de Newmark (v. par exemple [2]). Son principe est le suivant :

On suppose connue la solution ( $\vec{U}_n$ ,  $\dot{\vec{U}}_n$  et  $\ddot{\vec{U}}_n$ ) à l'instant  $n$  et l'on veut évaluer la solution à l'instant  $n+1$ . L'intervalle de temps entre les deux instants est  $\Delta t$ .

Il faut donc résoudre :

$$M\ddot{\vec{U}}_{n+1} + K\vec{U}_{n+1} = \vec{F}$$

où  $M$  est appelée matrice de masse. La seule différence par rapport à ce qui est décrit dans la partie précédente est donc l'introduction de ces forces d'inertie. Pour résoudre, on procède de la manière suivante : on pose :

$$\begin{cases} \dot{\vec{U}}_{n+1} = \dot{\vec{U}}_n + \left( (1-\gamma)\ddot{\vec{U}}_n + \gamma\ddot{\vec{U}}_{n+1} \right) \Delta t \\ \vec{U}_{n+1} = \vec{U}_n + \Delta t \dot{\vec{U}}_n + \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{U}}_n + \beta \ddot{\vec{U}}_{n+1} \right) \Delta t^2 \end{cases}$$

$\ddot{\vec{U}}_{n+1}$  est alors solution du système linéaire :

$$\left[ M + \beta \Delta t^2 K \right] \ddot{\vec{U}}_{n+1} = \vec{F}_{n+1} - K \left( \vec{U}_n + \Delta t \dot{\vec{U}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\vec{U}}_n \right)$$

et l'on obtient  $\vec{U}_{n+1}$  et  $\vec{U}_{n+1}$  par les deux équations qui précèdent.

On montre (v. par exemple [2]) que ce schéma est stable sous la condition :

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \gamma \right)^2$$

On a retenu les valeurs  $(\beta, \gamma) = (1/4, 1/2)$  qui minimisent la dissipation numérique.

## 2.2. Prise en compte de la plasticité (et de la viscoplasticité)

Le principe de la méthode des éléments finis a été introduit dans la première partie en supposant le comportement élastique linéaire. Pour tenir compte des phénomènes dus à la plasticité, il faut donc modifier l'algorithme. Un algorithme permettant des calculs par éléments finis a été introduit par Q. S. Nguyen (v. [3]). Son principe est le suivant :

On appelle  $S$  l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles et  $P$  l'ensemble supposé convexe des champs de contrainte plastiquement admissibles.

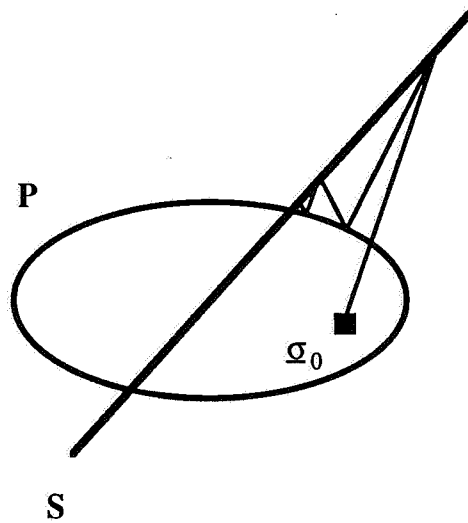
$$S = \left\{ \underline{\sigma} / \begin{array}{l} \text{div } \underline{\sigma} + \vec{F}_d = 0 \text{ dans } V \\ \underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \text{ sur } S_T \end{array} \right\}$$

$$P = \{ \underline{\sigma} / f(\underline{\sigma}) \leq 0 \}$$

Les calculs en plasticité étant incrémentaux, on suppose connu un champ  $\underline{\sigma}_0$  satisfaisant les conditions d'équilibre en plasticité sous un chargement donné et l'on recherche le nouveau champ  $\underline{\sigma}$  obtenu après application d'un nouvel incrément de chargement. Ce nouveau champ doit évidemment être statiquement et plastiquement admissible. Or, l'algorithme décrit dans la première



partie permet de déterminer un champ statiquement admissible, mais celui n'a aucune raison d'être plastiquement admissible. Nous allons donc le projeter sur le convexe de plasticité et ainsi de suite. L'idée de base de l'algorithme peut donc être schématisée de la manière suivante :



De manière plus précise, en bouclant sur  $n$ , on fait les opérations suivantes :

- Calcul élastique suivant l'algorithme de la première partie avec des forces de volume  $\underline{L}:\Delta\epsilon_n^p$  ( $\Delta\epsilon_0^p=0$ ). Soient  $\Delta\vec{u}_n$  et  $\Delta\epsilon_n$  la solution.  

$$\underline{\sigma}^{S.A.} = \underline{\sigma}_0 + \underline{L}:\Delta\epsilon_n$$
- Projection de  $\underline{\sigma}^{S.A.}$  sur le convexe de plasticité :

$$\underline{\sigma}^{P.A.} = \text{Proj}_P(\underline{\sigma}_0 + \underline{L}:\Delta\epsilon_n)$$

$$\underline{L}:\Delta\epsilon_{n+1}^p = \underline{\sigma}^{S.A.} - \underline{\sigma}^{P.A.}$$

On s'arrête dès que l'on a sensiblement :

$$\underline{\sigma}^{S.A.} \approx \underline{\sigma}^{P.A.}$$

Q. S. Nguyen a montré la convergence de cet algorithme implicite. En fait dans le cas de pas de temps très petit, on peut rendre cet algorithme explicite en se limitant à une simple projection sur le convexe de plasticité. C'est la

démarche que nous avons adopté dans nos calculs élasto-plastiques.

Dans le cas des calculs élasto-viscoplastiques, l'utilisation de pas de temps très petits nous autorise l'algorithme extrêmement simple suivant :

A chaque pas de temps :

- Calcul élastique de  $\underline{\Delta\sigma}_e$
- $\underline{\dot{\epsilon}}^p = g(\underline{\sigma} + \underline{\Delta\sigma}_e)$
- $\underline{\Delta\epsilon}^p = \underline{\dot{\epsilon}}^p \Delta t$
- $\underline{\Delta\sigma} = \underline{\Delta\sigma}_e - \underline{L}:\underline{\Delta\epsilon}^p$

### 3. Description de l'algorithme permettant de calculer les contraintes résiduelles.

Le problème est, rappelons-le, le suivant : on veut déterminer le champ de contrainte à l'équilibre induit dans une structure élastique par un champ de déformation plastique donné. Ce problème peut être traité simplement à l'aide de l'algorithme décrit dans la première partie. En effet, on cherche le champ de contrainte statiquement admissible vérifiant :

$$\underline{\sigma} = \underline{L}:(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^p)$$

or, si l'on pose :

$$\underline{\Sigma} = \underline{\sigma} + \underline{L}:\underline{\epsilon}^p$$

$\underline{\Sigma}$  est alors solution du problème élastique :

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma} &= \underline{L}:\underline{\epsilon} \\ \text{div } \underline{\Sigma} + \underline{F}_d - \text{div}(\underline{L}:\underline{\epsilon}^p) &= 0 \text{ dans } V \\ \underline{\Sigma} \cdot \vec{n} &= \vec{T}_d + (\underline{L}:\underline{\epsilon}^p) \cdot \vec{n} \text{ sur } S_T \end{aligned}$$

Il s'agit d'un problème purement élastique soluble à l'aide de l'algorithme de la première partie. On voit que pour en

arriver là, il suffit d'ajouter des forces de volume et de surface fictives dérivées du champ de déformation plastique initial. Pour calculer numériquement les contraintes résiduelles à partir de la déformation plastique, il suffira donc d'utiliser un code élastique à déformation initiales. Dans les exemples cités dans le chapitre 4 de la partie I, nous avons utilisé un tel code écrit par Pirouz Kasmaï-Navidi. Ce code est bidimensionnel et peut fonctionner en contrainte plane, en déformation plane et en axisymétrique.

## Conclusion

Sans prétendre vouloir faire une description exhaustive des méthodes numériques utilisées en Mécanique, ni un guide de programmation détaillé, nous avons tenté de décrire les algorithmes utilisés de façon suffisamment précise pour qu'un lecteur désirant approcher numériquement le problème considéré puisse reproduire nos calculs.

## Références

- [1] O. Zienkiewicz, "La Méthode des Eléments Finis", Ediscience, 1973.
- [2] R. Dautray et J. L. Lions, "Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques", Masson, 1985.
- [3] Q. S. Nguyen, "Contribution à la Théorie Macroscopique de l'Elastoplasticité avec Ecrouissage", thèse de doctorat d'état de Paris VI, 1973

